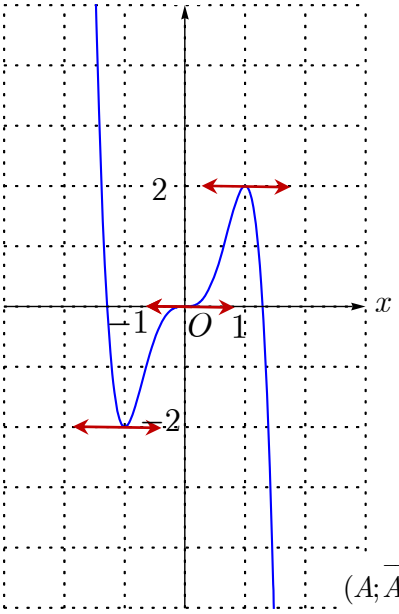
أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول :

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ خطّه البياني C المرسوم في الشكل المجاور :



❶ جِدْ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $f(]0,+\infty[)$.

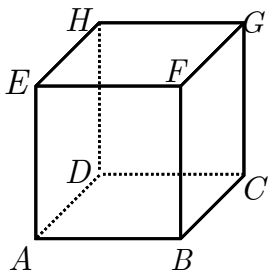
❷ احسب $f'(0)$. هل $f(0)$ قيمة حدية محلياً ؟ علل إجابتك .

❸ دل على القيم الحدية محلياً مبيّناً نوعها .

❹ ما مجموعة حلول المتراجحة $f'(x)\geq 0$ ؟

السؤال الثاني:

$ABCDEFGH$ مكعّب طول ضلعه يساوي 1 . لنختر المعلم المتجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$



❶ جِدْ إحداثيات النقاط B و H و F و C .

❷ أثبت أنّ المستقيمين (BH) و (FC) تمثيلاهما الوسيطي هو :

$$(FC):\begin{cases}x=1\\y=t'\\z=1-t'\end{cases}:t'\in\mathbb{R} \quad \text{و} \quad (BH):\begin{cases}x=1-t\\y=t\\z=t\end{cases}:t\in\mathbb{R}$$

❸ أثبت أنّ المستقيمين (BH) و (FC) متعامدان وغير متقاطعين(متخالفين).

❹ لتكن $M\in(BH)$ و $M'\in(FC)$. أثبت أنّ: $MM'^2=3(t-\frac{1}{3})^2+2(t'-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{6}$

❺ ما قيمتا العددين t و t' حتى يكون MM' أصغر ما يمكن ؟ حدّد إذن البعد بين المستقيمين (BH) و (FC) المتخالفين.

السؤال الثالث : ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}^*$ وفق العلاقة : $f(x)=\dfrac{5^x}{5^{2x}-1}$.

❶ أثبت أنّ f تابع فردي . واستنتج الصفة التناظرية لخطّه البياني .

❷ حل المعادلة $f(x)=\dfrac{2}{3}$ واستنتج حل المعادلة $f(x)=-\dfrac{2}{3}$.

السؤال الرابع: جمعية مكوّنة من ستة رجال وأربع نساء

نريد تشكيل لجنة فيها (رجل على الأقل و امرأة على الأقل) مؤلّفة من ثلاثة أشخاص .

❶ ما عدد اللجان المختلفة التي يمكن تشكيلها ؟

❷ ما عدد اللجان المختلفة التي يمكن تشكيلها علماً أنّ هناك امرأتان متخاصمتان لا تجتمعان في اللجنة ؟

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على المجال $I=[0,\frac{\pi}{2}[$ وفق العلاقة : $f(x)=2x-\tan x$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)$ واستنتج معادلة المستقيم المقارب الشاقولي لخطّه البياني .

❷ ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها . ودل على القيم الحديةّ محلياً مبيّناً نوعها .

❸ أثبت أنّ للمعادلة $f(x)=-1$ حل وحيد α في I . ثمّ ارسم C .

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثاني : صندوق يحوي خمس كرات مرقّمة بالأرقام 1 و 1 و 2 و 2 و 3

نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع إعادة .

❶ ما عدد النتائج المختلفة لهذا السحب ؟

❷ ما عدد النتائج المختلفة التي تشتمل على كرات مجموع أرقامها يساوي 6 ؟

❸ ما عدد النتائج التي تشتمل على ظهور كرة تحمل الرقم 1 في السحب الثاني؟

التمرين الثالث : لنعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وفق العلاقة التدريجية : $\begin{cases} u_0 = 2 \ , \ u_1 = 5 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \end{cases}$

❶ لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية: $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية وجِدْ أساسها .

❷ لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية: $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ أثبت أنّ المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسية وجِدْ أساسها .

❸ عبّر عن v_n و w_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

❹ أثبت بالتدريج أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 2$: صحة المتراجحة الآتية : $4^n \geq 3^n + 2^n$.

التمرين الرابع:

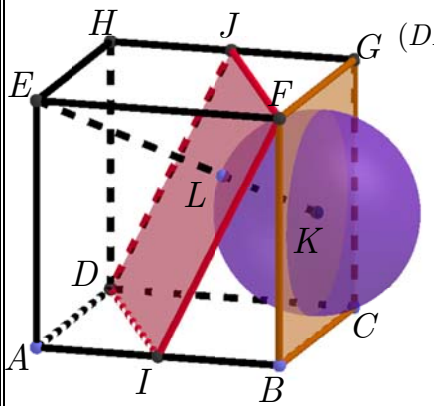
❶ أثبت مستعملاً منشور ثنائي الحد ودستوري أويلر بأنّ: $\sin^3 x = \frac{-1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$.

❷ استنتج النهاية الآتية : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}$.

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين : (100درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: $ABCDEFGH$ مكعّب طول حرفه يساوي 1 ، I و J هما، بالترتيب، منتصفا $[AB]$ و $[GH]$ و K مركز الوجه $BCGF$. ولنختر معلماً متجانساً $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

❶ a. أثبت أنّ $DIFJ$ متوازي أضلاع ثمّ احسب $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{DF}$. واستنتج أنّ $DIFJ$ معيّن وأنّ مساحته تساوي $\frac{\sqrt{6}}{2}$



b. تحقّق أنّ $\vec{n}(2,1,-1)$ ناظم على المستوي (DIJ) ثمّ اكتب معادلةً للمستوي (DIJ)

c. احسب بعد النقطة E عن المستوي (DIJ) ثمّ احسب حجم الهرم $EDIFJ$.

❷ ليكن Δ المستقيم المار من النقطة E والعمودي على المستوي (DIJ) .

a. أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ . وتحقّق أنّ النقطة K تنتمي إليه .

b. أوجد إحداثيات النقطة L نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (DIJ) .

c. تحقّق أنّ النقطة L هي مركز ثقل المثلّث BEG .

❸ اكتب معادلة الكرة S التي مركزها K وتمس المستوي (DIJ) ثمّ تحقّق أنّ L هي نقطة تماسهما .

المسألة الثانية :

ليكن التابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = 2e^{-x} + x - 2$ خطّه البياني C .

❶ أوجد معادلة المقارب المائل وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه .

❷ ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها . وبيّن أنّه يبلغ قيمة حدية محلية عيّنها وبيّن نوعها .

❸ استنتج أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر نرمزه بالرمز α أثبت أنّ $1 < \alpha < 2$.

❹ ارسم المقارب المائل ثمّ ارسم C .

.....انتهت الأسئلة .....