أولاً : **أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية**: (40 **درجة لكل سؤال**)

السؤال الأول : احسبي كلاً مما يأتي :

❒ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{x}$.

❒ $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{x(1-\ln x)}\,dx$.

السؤال الثاني : عّيني قيمة العدد الطبيعي n الذي يحقق : $P_n^7 = 720\dbinom{n}{5}$.

السؤال الثالث: أثبتي بالتدريج صحة الخاصة الآتية أياً كان العدد الطبيعي n:

$E(n)$: « $7\times 3^{5n}+4$ مضاعفٌ للعدد 11 » .

السؤال الرابع: أثبتي أنّ العددَ $A=(2+\sqrt{3})^5+(2-\sqrt{3})^5$ عددٌ طبيعي.

ثانياً : **حلي التمارين الأربعة الآتية** :(60 **درجة لكل سؤال**)

التمرين الأول : المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق العلاقة: $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}=\sqrt{4u_n}\end{cases}$

❶ لنعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ بالعلاقة : $v_n=\ln u_n-\ln 4$ أثبتي أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية عيّني أساسها واكتبي عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتجي عبارة u_n بدلالة n .

❷ استنتجي نهاية كلاً من المتتاليتين $(v_n)_{n\geq1}$ و $(u_n)_{n\geq1}$.

التمرين الثاني : يلعب فريق مباراتين . الأولى على أرضه والثانية على أرض الخصم احتمال أن يفوز الفريق في المباراة الأولى $\dfrac{2}{3}$. واحتمال أن يفوز بالثانية علماً أنّه خسر الأولى $\dfrac{2}{5}$.

واحتمال أن يخسر الثانية علماً أنّه قد فاز بالأولى $\dfrac{2}{7}$.

نرمّز بالرمز A الحدث : « الفوز بالمباراة الاولى » و B الحدث : « الفوز بالمباراة الثانية »

❶ ما احتمال أن يفوز الفريق بالمباراة الثانية ؟

❷ ما احتمال أن يفوز الفريق بواحدة من المباراتين على الأقل؟

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الثالث : في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، لدينا النقطة $A(2,1,2)$ ، والمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{P} : x + y - 2z - 1 = 0$$
$$\mathcal{Q} : x + y + z = 0$$

❶ أثبتي أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$ متعامدان .

❷ احسبي بعد A عن كلٍّ من المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

❸ استنتجي بعد النقطة A عن الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{Q}$.

التمرين الرابع : المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرّفة وفق العلاقة: $u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n}$.

❶ أثبتي ، مستعملةً البرهان بالتدريج ، أنّه أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$ كان $n \leq 2^n$.

❷ استنتجي مما سبق عنصراً راجحاً على المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$.

❸ أثبتي أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة .

ثالثاً: حلي المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: في معلمٍ متجانسٍ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقط: $A(0,4,1)$ و $B(1,3,0)$ و $C(2,-1,-2)$ و $D(7,-1,4)$

❶ أثبتي أنّ النقاط A و B و C لا تقع على استقامةٍ واحدة .

❷ ليكن Δ مستقيماً يمر بالنقطة D وشعاع توجيهه $\vec{u}(2,-1,3)$.

a. بيّني أنّ المستقيم Δ يعامد المستوي (ABC) . b. اكتبي معادلةً للمستوي (ABC) .

❸ ليكن المستويان $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 0$ و $\mathcal{P}_2 : x + 4y + 2 = 0$

a.أثبتي أنّ المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متقاطعان .

b. تحققي أنّ المستقيم d الذي يمثّل الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ يعطى بتمثيل وسيطي :

$$d : \begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases} \qquad : t \in \mathbb{R}$$

c. تحققي فيما إذا كان المستقيم d يقطع المستوي (ABC) أو يوازيه و لا يشترك معه بأية نقطة .

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$.

❶ ليكن g التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ وفق $g(x) = 1 - x + e^x$ ادرسي اطراد التابع g واستنتجي أنّ $g(x) > 0$ أياً تكن $x \in \mathbb{R}$

❷ أثبتي أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$. يكن $f'(x) = e^{-x}g(x)$. واستنتجي أنّ f متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$.

❸ ادرسي تغيّرات التابع f ونظّمي جدولاً بها .

❹ أثبتي أنّ للخط C مقارب مائل Δ في جوار $+\infty$ يطلب إيجاد معادلته . وادرسي وضع C بالنسبة إلى Δ .

❺ أثبتي أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = 2x + 1$ مماس للخط C في نقطة فاصلتها $x = 0$ وادرسي وضع C بالنسبة إلى d .

❻ ارسمي Δ و d ثمّ C في المعلم ذاته .

.... انتهت الأسئلة..