أولاً : أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 لكل سؤال)

السؤال الأول : اكتبي $\sin^3 x$ بصيغة عبارات خطية في النسب المثلثية لمضاعفات الزاوية x باستخدام دستوري أويلر ، واستنتجي $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot dx$.

السؤال الثاني : عيّني الأعداد الطبيعية n التي تحقق المساواة : $12\binom{n+2}{4} = 7P_n^3$.

السؤال الثالث : حلّي المعادلة التفاضلية: $2y' + 5y = 0$ حيث ميل المماس في النقطة التي فاصلتها 0 من الخط البياني للحل يساوي -2.

السؤال الرابع : لتكن النقطتان $A(2,3,-1)$ و $B(1,1,1)$، والمستوي $\mathcal{P}$ الذي معادلته : $2x + z - 4 = 0$ بيّني أنّ المستقيم (AB) ليس عمودياً على $\mathcal{P}$، ثمّ أعطِ معادلةً للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ والمار بالنقطتين A و B.

ثانياً : حلي التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل سؤال)

التمرين الأول : أثبتي بالتدريج صحة الخاصة الآتية :

« $1\times 2 + 2\times 3 + \dots\dots\dots + n\times(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ » أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

التمرين الثاني : تتكوّن مجموعة من الأشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء ، من بينهم رجلٌ واحدٌ اسمه سعيد وامرأةٌ واحدةٌ اسمها سعاد. تريد هذه المجموعة وبواسطة القرعة اختيار لجنة مكوّنة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام .

❶ كم عدد اللجان التي يمكن تكوينها ؟

❷ احسبي احتمالات الأحداث الآتية:

A : « تضم اللجنة ثلاثة رجال ».

B : « تضم اللجنة رجلاً وامرأتين ».

C : « تضم اللجنة إمّا سعيد و إمّا سعاد (أي واحدٌ منهما فقط) ».

التمرين الثالث : $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2$ عند كل $n \geq 0$.

❶ نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث $v_n = u_n - 4$. أثبتي أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية عيّني أساسها واستنتجي عبارة v_n بدلالة n ، ثمّ عبارة u_n بدلالة n.

❷ لتكن $S_n = v_0 + v_1 + \dots\dots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots\dots + u_n$ اكتبي عبارة S_n و S'_n بدلالة n .

❸ استنتجي نهاية كلٍّ من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 0}$ و $(S'_n)_{n\geq 0}$.

يوجد صفحة ثانية يرجى قلب الصفحة

التمرين الرابع : يحتوي صندوق على ست كرات مرقّمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$.

نسحب عشوائيّاً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق .

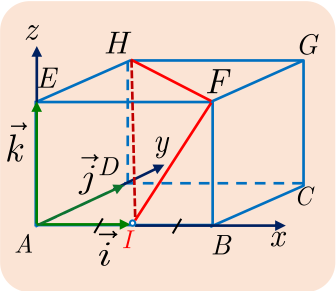
❶ إذا علمتِ أنّ مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين زوجياً ، ما احتمال أن تحمل كلٍّ منهما رقماً زوجياً .

❷ ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة أصغر رقمي الكرتين المسحوبتين .

عيّني مجموعة قيم X ، واكتبي قانونه الاحتمالي ، واحسبي توقعه الرياضي وتباينه .

ثالثاً: **حلي المسألتين الآتيتين**: (100 **درجة لكل مسألة**)

المسألة الأولى :



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات ، فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$.

ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$. ونتّخذ معلماً متجانساً مبدؤه A كما في الشكل المجاور.

❶ اكتبي إحداثيات النقط I و F و H ثمّ اكتبي معادلةً للمستوي (IFH) .

❷ أعطِ تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار بالنقطة G و العمودي على المستوي (IFH) .

❸ استنتجي إحداثيات النقطة G' المسقط القائم للنقطة G على المستوي (IFH) .

المسألة الثانية : ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

❶ أثبتي أنّ f تابع فردي .

❷ أوجدي نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه ، واستنتجي معادلة كل مقارب أفقي للخط C .

❸ ادرسي تغيرات f ونظمي جدولاً بها .

❹ ارسمي ما وجدتيه من مقاربات ثمّ ارسمي C .

❺ حدّدي هندسياً عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$.

.... انتهت الأسئلة..