أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

f معرف على $]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$

2 ① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

2 ومنه $\boxed{y=-1}$ مستقيم مقارب أفقي

2 $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

2 ومنه $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي.

2 $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

2 ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي.

2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

2 ② $(0,1)$, $(2,0)$ $\quad m = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$

2 $D: y = -\frac{1}{2}x + p$

2 $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 1}$

حيث p هو ترتيب نقطة تقاطع D مع $y'y$.

2 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ الميل المائل

2 $= -\frac{1}{2}$

2+2 ③ للمعادلة $f(x)=0$ حلان هما

$x=-2$, $x=1$

2 ④ $g(x) = \sqrt{f(x)}$

g معرف عندما $f(x) \geq 0$ وهذا محقق

2+2 عندما

$x \in [-2,-1[\,\cup\,]0,1]$

2 ⑤

x	$-\infty$		-1	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$			$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

40

السؤال الثاني:

① $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|\cos\frac{\pi}{3}$

$= a \cdot a \cdot \frac{1}{2}$

4 $= \frac{a^2}{2}$

4 $\vec{AB}\cdot\vec{CI} = 0$

(لأن: المتوسط النازل من رأس في مثلث متساوي الأضلاع هو ارتفاع)

$\vec{IJ}\cdot\vec{DA} = -\|\vec{IJ}\|\cdot\|\vec{DA}\|$

4
4 $= -\frac{a}{2}\cdot a = -\frac{a^2}{2}$

4 $\vec{AJ}\cdot\vec{DA} = \vec{AJ}\cdot\vec{JA}$

$= -\vec{AJ}\cdot\vec{AJ}$

4 $= -\|\vec{AJ}\|^2$

$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$

4 $= -\frac{3a^2}{4}$

(ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع $= \frac{\sqrt{3}}{2}a$)

4 ② $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \vec{AB}(\vec{CA}+\vec{AD})$

$= \vec{AB}\cdot\vec{CA} + \vec{AB}\cdot\vec{AD}$

4 $= -\vec{AB}\cdot\vec{AC} + \vec{AB}\cdot\vec{AD}$

2 $= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

ومنه $\vec{CD}$ يعامد $\vec{AB}$

2 أي $(CD) \perp (AB)$

40

السؤال الثالث :

(1) حل المعادلة :

$\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(x+1) - \ln\sqrt{3-x}$

شروط مجموعة تعريف المعادلة :

$2x>0$ و $x+1>0$ و $3-x>0$

3 $x>0$ و $x>-1$ و $x<3$

$x \in]-\infty,3[\cap]-1,+\infty[\cap]0,+\infty[$

3 $x \in]0,3[= D_1$

نضرب بالعدد 2

3 $\ln(2x) = \ln(x+1)^2 - \ln(3-x)$

3 $\ln(2x) = \ln\left(\frac{(x+1)^2}{3-x}\right)$

3 $2x = \frac{(x+1)^2}{(3-x)}$

3 $(x+1)^2 = 2x(3-x)$

$x^2+2x+1 = 6x-2x^2$

3 $3x^2-4x+1=0$

$\Delta = 16-4(3)(1)$

2 $\Delta = 16-12=4$

2 $\sqrt{\Delta}=2$

2 إما $x = \frac{4+2}{2(3)} = 1 \in]0,3[$ مقبول

2 أو $x = \frac{4-2}{2(3)} = \frac{1}{3} \in]0,3[$ مقبول

2 $S = \{1, \frac{1}{3}\}$

(2) $\ln(e^x+3) > 1$

3 $\ln(e^x+3) > \ln e$

$e^x+3 > e$

3 $\underbrace{e^x}_{\text{موجب}} > \underbrace{e-3}_{\text{سالب}}$

3 المتراجحة محققة أياً كان $x \in \mathbb{R}$

$\boxed{S = \mathbb{R}}$

40

السؤال الرابع :

(1) 5 $z_A = 1-3i$

5 $z_B = 2-i$

(2) 5 $\alpha - \beta = \arg(z_A) - \arg(z_B)$

5 $= \arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$

$= \arg\left(\frac{1-3i}{2-i}\right)$

5 $= \arg\left(\frac{(1-3i)(2+i)}{4+1}\right)$

5 $= \arg\left(\frac{2+i-6i+3}{5}\right)$

5 $= \arg\left(\frac{5-5i}{5}\right)$

5 $= \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

40

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية :

التمرين الأول :

(1) $a=2$

3 $\boxed{a = 2e^{0i}}$

$b = 3+i\sqrt{3}$

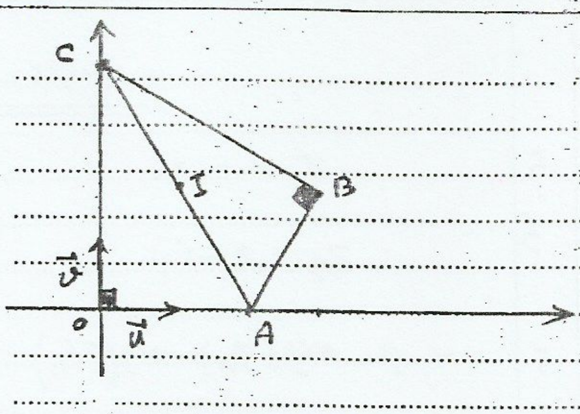
3 $b = \sqrt{3}(\sqrt{3}+i)$

$b = \sqrt{3}\cdot 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

3 $\boxed{b = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$c = 2\sqrt{3}i$

3 $\boxed{c = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}}$



3

② $\frac{a-b}{c-b} = \frac{2-3+i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}i-3-i\sqrt{3}}$ 3

$\frac{a-b}{c-b} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{-3+\sqrt{3}i}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$\frac{a-b}{c-b} = \frac{(-1-i\sqrt{3})(-3-\sqrt{3}i)}{9+3}$ 3

$\frac{a-b}{c-b} = \frac{3+\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i-3}{12}$

$\frac{a-b}{c-b} = \frac{6\sqrt{3}}{12}i$ 3

$\frac{a-b}{c-b} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 3

$\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ 3

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$ 3

فالشعاعان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان 3

فالمثلث ABC قائم في B

③ $o-c \overset{?}{=} e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-c)$ 3

$\ell_1 = o-c = -c = -2\sqrt{3}i$ 3

$\ell_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-c)$

$= \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3+i\sqrt{3}-2\sqrt{3}i)$ 3

$= \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(3-\sqrt{3}i)$

$= \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{2}$ 3

$= -2\sqrt{3}i$

$\ell_1 = \ell_2$

ومنه O هي صورة B وفق دوران يتعين مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

3 لدينا $\hat{O} + \hat{B} = 180$ لأن

الشكل $OABC$ رباعي دائري

لأن فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان.

أي النقاط O و A و B و C تقع على دائرة

واحدة مركزها I منتصف الوتر

المشترك $[AC]$

$Z_I = \frac{a+c}{2} = \frac{2+2\sqrt{3}i}{2}$

3 $\boxed{Z_I = 1+\sqrt{3}i}$

$I(1, \sqrt{3})$ مركز الدائرة.

$R = \frac{AC}{2}$

3 $AC = |z_C - z_A| = |2\sqrt{3}i - 2|$

$= \sqrt{12+4} = 4$

3 $\boxed{R = \frac{4}{2} = 2}$

60

التمرين الثاني:

5 $2x + \cos x = 0$

5 $f(x) = 0$

حيث $f(x) = 2x + \cos x$

5 f اشتقاقي على IR

5 $f'(x) = 2 - \sin x > 0$

5 ومنه f متزايد تماماً على IR

5 فإذا كان هناك حل للمعادلة $f(x)=0$ فهو وحيد

5 ولدينا:

5 $f(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0$

5 $f(0) = 1 > 0$

5 أي أن $f(-\frac{\pi}{6}) \cdot f(0) < 0$

5 فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في IR بحيث

5 $x \in]-\frac{\pi}{6}, 0[$

ملاحظة: يمكن للطالب أن يوجد نهايات التابع f عند $-\infty$ و $+\infty$ ويستخدم الاستمرار في ذلك ليصنع جدول التغيرات.

60

التمرين الثالث:

$f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$

3 (1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$

3+3 $\lim_{x \to -\infty} f(f(x)) = \lim_{X \to 2^-} f(X) = -\infty$

(2) $f(x) \in]1.98, 2.02[$

يعني أن $|f(x) - 2| <$ نصف طول المجال

3+3 $|f(x) - 2| < 0.02$

3 $|f(x) - 2| < \frac{2}{100}$

3 $\left|\frac{2x-3}{x-2} - 2\right| < \frac{1}{50}$

3 $\left|\frac{2x-3-2x+4}{x-2}\right| < \frac{1}{50}$

3 $\frac{1}{|x-2|} < \frac{1}{50}$

3 $|x-2| > 50$

3 عندما x جوار $-\infty$ فإن $|x-2| = -x+2$

3 $-x+2 > 50$

$-48 > x$

3 $\boxed{x < -48}$

3 ومنه $\boxed{A = -48}$

3 (3) f اشتقاقي على $]-\infty, 2[$

3 $f'(x) = \frac{2(x-2) - 1(2x-3)}{(x-2)^2}$

3 $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$

$g : x \mapsto \frac{2\sin x - 3}{\sin x - 2}$

3 $g(x) = f(\sin x)$

3 $g'(x) = (\sin x)' \cdot f'(\sin x)$

3 $= \cos x \cdot \frac{-1}{(\sin x - 2)^2}$

$= \frac{-\cos x}{(\sin x - 2)^2}$

60

٢٤

التمرين الرابع :

① نلاحظ أن صورة B بعد دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ — 4

$R_{A,-\frac{\pi}{2}}(B)=N$

$n-a=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a)$

$n-a=-i(b-a)$ — 4

$\boxed{n=-ib}$

F هي صورة C بعد دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ — 4

$R_{A,\frac{\pi}{2}}(C)=F$

$f-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$ — 4

$\boxed{f=ic}$

② إثبات أن : $f-b=i(c-n)$ — 4

$\ell_1=f-b=ic-b$

$\ell_2=i(c-(-ib))$ — 4

$=i(c+ib)$ — 4

$=ic-b$ — 4

$\ell_1=\ell_2$

③ إثبات المطلوب بعد أن :

$f-b=i(c-n)$

$\frac{f-b}{c-n}=i$ — 4

$\arg\left(\frac{f-b}{c-n}\right)=\arg(i)$ — 4

$(\overrightarrow{NC},\overrightarrow{BF})=\frac{\pi}{2}$ — 4

فالمستقيمان (NC) و (BF) متعامدان — 4

4 — $\left|\frac{f-b}{c-n}\right|=|i|$

4 — $\frac{|f-b|}{|c-n|}=1$

4 — $\frac{BF}{CN}=1$

$\boxed{BF=CN}$

٢٥

60 — ثالثاً : حل المسائل الآتية :

المسألة الأولى :

3 — ① $A(3,0,0)$

3 — $B(0,2,0)$

3 — $C(0,0,1)$

3 — $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$

3 — $\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$

3 — نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على المستوي (ABC) يكون $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

3+3 — $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ، $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

3+3 — $-3a+2b=0$ ، $-3a+c=0$

3, 3 — $\begin{cases}-3a+2b=0\\-3a+c=0\end{cases}$

3 — نفرض $a=2$ فيكون

3, 3 — $\boxed{b=3}$ ، $\boxed{c=6}$

$\vec{n}(2,3,6)$

$(ABC):\begin{cases}A(3,0,0)\\\vec{n}(2,3,6)\end{cases}$

3 — $2(x-3)+3(y-0)+6(z-0)=0$

3 — $\boxed{2x+3y+6z-6=0}$

② $\vec{AK}\left(-\frac{27}{13}, \frac{18}{13}, 0\right)$ 3

$\vec{AB}(-3, 2, 0)$ 3

نلاحظ أن $\vec{AK} = \frac{9}{13}\vec{AB}$ 3

فالشعاعان $\vec{AK}$ و $\vec{AB}$ مرتبطان خطياً 3

فالنقاط A و K و B تقع على استقامة واحدة. 3

③ $\vec{OK}\left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}, 0\right)$ 3

$\vec{AB}(-3, 2, 0)$ 3

$\vec{OK}\cdot\vec{AB} = \left(\frac{12}{13}\right)(-3)+\left(\frac{18}{13}\right)(2)+0$ 3

$= \frac{-36}{13}+\frac{36}{13}+0=0$ 3

فالشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{OK}$ متعامدان (K مسقط قائم للنقطة O على (AB)). 3

④ $S(OAB)=\frac{1}{2}\, OA\cdot OB$ 3

$=\frac{1}{2}(3)(2)=3$ 3

من جهة أخرى

$S(OAB)=\frac{1}{2}\, AB\cdot OK$ 3

$3=\frac{1}{2}\sqrt{9+4}\cdot OK$

$\boxed{OK=\frac{6}{\sqrt{13}}}$ 3

$V(OABC)=\frac{1}{3}\, S(OAB)\cdot OC$ 3

$=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 1=1$ 4

100

٢٦

المسألة الثانية:

أولاً: $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}\ln x$

ثانياً: $A(1,0)\in C$ 3

$\boxed{f(1)=0}$ (I) 3

$\boxed{f'(1)=3}$ (II) 5

لأن المماس لـ C في A يوازي $y=3x+2$ (فله نفس الميل)

من (I) نجد:

$\boxed{a+b=0}$ ① 3

نوجد المشتق على $]0,+\infty[$

$f'(x)=a+\frac{-1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}$ 3

من (II) لدينا $f'(1)=3$

$a+1=3$

$\boxed{a=2}$ ② 3

نعوض ② في ① نجد

$2+b=0 \Rightarrow b=-2$ 3

فالتابع المدروس هو:

$f(x)=2x-2+\frac{\ln x}{x}$

ثالثاً:

① إثبات أن $d: y=2x-2$ مقارب للخط C

$f(x)-y_d=\frac{\ln x}{x}$ 3

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=0$ 3

ومنه فالمستقيم $d: y=2x-2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ 3

لدراسة وضع C بالنسبة إلى d

ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - y = \frac{\ln x}{x}$$

حيث $f(x) - y = 0$ عندما $\ln x = 0$ 3

ومنه $\boxed{x = 1}$ 3

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	‖	C تحت d	نقطة تقاطع بين C و d	C فوق d	

3 3 3

② $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$ 3

$g'(x) = 4x - \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{4x^2 - 1}{x}$ 3

$g'(x) = 0$ عندما $4x^2 - 1 = 0$

$4x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{4}$

ومنه إما $x = \frac{1}{2}$ أو $x = -\frac{1}{2}$ مرفوض 3

$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \ln 2$ 3

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$\frac{3}{2} + \ln 2$	↗	

3 3 3

نلاحظ أنه

$x \in]0, +\infty[$ أي أن $g(x) \geq \frac{3}{2} + \ln 2 > 0$ 3

وهي موجبة تماما على المجال

3 ③ f اشتقاقية على $]0, +\infty[$

3 $f'(x) = 2 + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$

3 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$

3 ومنه f متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

④ f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]0, +\infty[$

3 $\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

3 ومنه $\boxed{x = 0}$ مستقيم مقارب عمودي

3 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

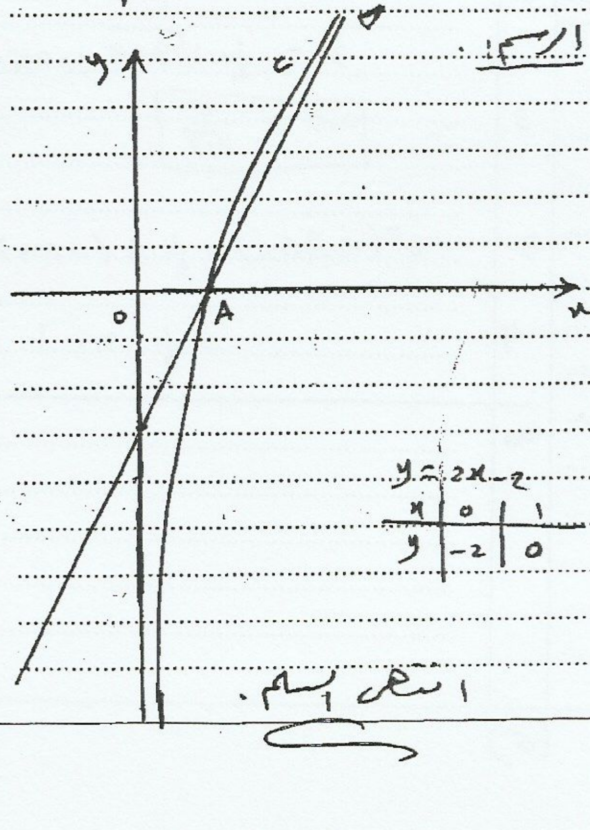
$\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right)$

3

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

الرسم

4



$y = 2x - 2$

x	0	1
y	-2	0

انتهى السلم

60 ٢٧