أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

① 2 $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$

2 ومنه المستقيم $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي

2 ومنه $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$

2 $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي

2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a = 1$ (ميل المقارب المائل)

معادلة المقارب المائل:

2 $D: y = x-1$

② 2 $f(-3) = -1$

2 $f(-2) = -3$

2 $f(1) = 1$

2 $f'(1) = 0$ (لأن المماس أفقي)

$f'(-3) = ?$

$f'(-3)$ تعني هندسياً ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها -3.

حيث هذا المماس يمر بالنقطتين

$(-1,-2)$ و $(-3,-1)$

2 $m = \frac{-1+2}{-3+1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

2 $f'(-3) = -\frac{1}{2}$

③ 2+2 f ليس استمرارياً عند $x=-2$ لأن f ليس مستمراً عند -2

④ 2+2 f ليس اشتقاقياً عند 0 لأن المماس شاقولي

⑤ مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \le 0$ هي

2×3 $x \in]-\infty,-2[\cup]-2,-1[\cup [0,1]$

40

١٢

السؤال الثاني:

① 5 $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

5 $= \frac{1}{2}(169 - 25 - 144)$

5 $= 0$

5 فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان.

② 5 $(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = 0$

5 $\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$

$\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$

$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$

5 $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

5 فالشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما الطويلة نفسها

40

السؤال الثالث:

① C هي صورة O وفق دوران مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

2 $c - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(0-b)$

2 $c - b = -ib$

2 $\boxed{c = b - ib}$

D هي صورة O وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

2 $d - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(0-a)$

2 $d - a = -ia$

2 $\boxed{d = a - ia}$

② 2 $\frac{m-n}{m} = \frac{\frac{a+b}{2} - \frac{d+c}{2}}{\frac{a+b}{2}}$

2

2 $= \frac{a+b-a+ia-b+ib}{a+b}$

2 $= \frac{ia+ib}{a+b} = \frac{i(a+b)}{a+b}$

2 $\frac{m-n}{m} = i$

2 $\frac{m-n}{m-o} = i$

2 $\arg\left(\frac{m-n}{m-o}\right) = \arg(i)$

2 $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{NM}) = \frac{\pi}{2}$

2 فالمثلث OMN قائم في M

2 $\left|\frac{m-n}{m-o}\right| = |i|$

2 $\frac{|m-n|}{|m-o|} = 1$

2 $\frac{MN}{OM} = 1$

2 $MN = OM$

فالمثلث متساوي الساقين

2 فالمثلث OMN قائم في M ومتساوي الساقين.

40

السؤال الرابع:

(1) حل المعادلة الآتية:

$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln x$

المعادلة معرفة عندما

3 $6x-2>0$, $2x-1>0$, $x>0$

$x > \frac{1}{3}$, $x > \frac{1}{2}$, $x > 0$

3 $x \in]0,+\infty[\cap]\frac{1}{2},+\infty[\cap]\frac{1}{3},+\infty[$

$x \in]\frac{1}{2},+\infty[= D_1$

3 $\ln((6x-2)(2x-1)) = \ln x$

3 $(6x-2)(2x-1) = x$

3 $12x^2 - 6x - 4x + 2 = x$

$12x^2 - 11x + 2 = 0$

3 $D = 121 - 4(12)(2)$

١٣

$D = 121 - 96$

3 $D = 25$

$\sqrt{D} = 5$

3 إما $x = \frac{11+5}{2(12)} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$ $\in]\frac{1}{2},+\infty[$ مقبول

3 أو $x = \frac{11-5}{2(12)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \notin]\frac{1}{2},+\infty[$ مرفوض

3 $S = \{\frac{2}{3}\}$

(2) $(e^{5x}+2)(e^{-x}-2) \leq 0$

2 $e^{5x}+2 > 0$ على $\mathbb{R}$

فالمتراجحة المفروضة تكافئ

2 $e^{-x}-2 \leq 0$

2 $e^{-x} \leq 2$

2 $-x \leq \ln 2$

2 $x \geq -\ln 2$

$x \in [-\ln 2, +\infty[$

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$f(x) = \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}$

4 (1) f معرفة ومستمرة على $[0,+\infty[$

4 واشتقاقية على $]0,+\infty[$

4 $f(0) = 1$

4 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

4+4 $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$

4	x	0	α	$+\infty$
4	$f'(x)$	‖	$-$	
4	$f(x)$	1 ↘	0 ↘	$-\infty$

4+4 في المجال $[0,+\infty[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه

إذاً فإن هناك حل للمعادلة $f(x)=0$

وهو وحيد

حيث:

4 $f(0)=1>0$

4 $f(1)=-\frac{1}{2}<0$

4 $f(0)\times f(1)<0$ فالمعادلة $f(x)=0$

4 لها حل وحيد α يحقق $\alpha\in\,]0,1[$

التمرين الثاني:

4 $z_B - z_O = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_A - z_O)$ ①

4 $z_B = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\sqrt{3}+i)$

$z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}$

4 $\boxed{z_B = 2i}$

عبارة B هي صورة A بالدوران الذي مركزه O

4 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ فالمثلث OAB

متساوي الأضلاع

4 $z_C = z_D + 1$ ②

$z_C = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1$

4 $z_C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

③ حساب $\frac{z_B - z_A}{z_C}$

4 $\frac{z_B - z_A}{z_C} = \frac{2i - \sqrt{3} - i}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

4 $\frac{z_B - z_A}{z_C} = \frac{-\sqrt{3}+i}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

4
4 $= \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

$= 2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)}$

4 $\frac{z_B - z_A}{z_C} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

4 $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_O}\right) = \arg\left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$

4 $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2}$

فالشعاع $\overrightarrow{AB}$ يعامد $\overrightarrow{OC}$

4 ومنه (OC) ارتفاع في المثلث OAB

المتساوي الأضلاع

4 فهو محور.

50

١٤

التمرين الثالث:

$f(x) = x\,E(x) - \frac{1}{2}E(x)\,(1+E(x))$

(1)

4 4 4 $f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0,1[\\ x-1 & ; x \in [1,2[\\ 2x-3 & ; x \in [2,3[\end{cases}$

4 (2) التابع $x \mapsto 0$ مستمر على $[0,1[$

4 التابع $x \mapsto x-1$ مستمر على $[1,2[$

4 التابع $x \mapsto 2x-3$ مستمر على $[2,3[$

حتى يكون f مستمراً على $[0,3[$

4 يجب أن يكون مستمراً عند ١ و عند 2

لندرس استمرار f عند 1

4 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (0) = 0$

4 $f(1) = 1 - 1 = 0$

4 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

ومنه f مستمر عند 1

لندرس استمرار f عند 2

4 $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x-1) = 1$

4 $f(2) = 2(2) - 3 = 1$

4 $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$

4 ومنه f مستمر عند 2

4 وبالتالي f أصبح مستمراً على $[0,3[$

60

ملاحظة: يوجد طريقة ثانية لإثبات f مستمر على $[0,3[$ وذلك من خلال رسم الخط البياني للتابع f وملاحظة أنه عبارة عن قطعة واحدة على هذا المجال.

١٥

التمرين الرابع:

(1) $c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

2 $r = |c| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2 $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ } $\theta \in$ الربع الأول

$\theta = \frac{\pi}{6}$

2 $\boxed{z = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}}$

$d = \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

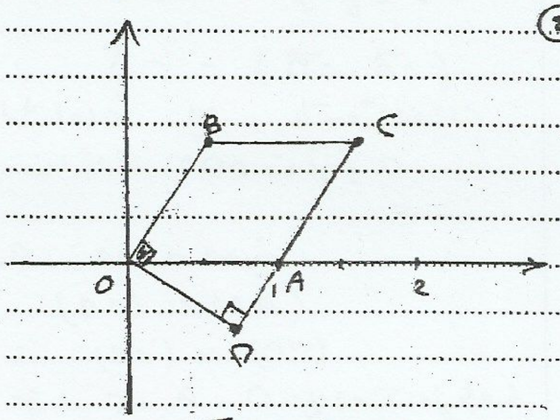
2 $d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})\right)$

2 $d = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$

2 $\boxed{d = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i}$

(2)

2 + 2 + 2 + 2



2 $z_{\vec{OA}} = 1$

2 $z_{\vec{BC}} = z_C - z_B = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = 1$

$z_{\vec{OA}} = z_{\vec{BC}}$

2 ومنه $\vec{OA} = \vec{BC}$

2 فالشكل OACB متوازي أضلاع

2 وفيه $OA = OB = 1$ فأصبح معيناً

③ 2 $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}\right)$

2 $= \arg\left(\dfrac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1}{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i - 1}\right)$

$= \arg\left(\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i}\right)$

$= \arg\left(\dfrac{2 + 2\sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i}\right)$

2 $= \arg(-2) = \pi$

2 الشعاعان $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطياً
فالنقاط A و D و C تقع على استقامة
واحدة.

④ 2 $\dfrac{d}{b} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$

2 $\dfrac{d}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$\arg\left(\dfrac{d}{b}\right) = \arg\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$

2 $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}) = -\dfrac{\pi}{2}$

2 بالشعاعان $\overrightarrow{OD}$ و $\overrightarrow{OB}$ متعامدان
فالمثلث ODB قائم في O

ولدينا: OACB معين
2 $(AC) \parallel (OB)$
ومنه $(CD) \parallel (OB)$
لأن C و A و D على استقامة واحدة

2 فالشكل ODCB شبه منحرف
وفيه $B\hat{O}D = 90^\circ$ فهو شبه منحرف قائم

2 $S(ODCB) = \dfrac{OB + DC}{2} \times OD$

2 $OB = |z_B| = 1$
2 $OD = |z_D| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2 $DC = |z_C - z_D| = \left|\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right|$

$= \left|\frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i\right|$

2 $= \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4}$
$= \frac{3}{2}$

$S(ODCB) = \dfrac{1 + \frac{3}{2}}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2 $= \frac{5}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{8}$

60 **ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:**

المسألة الأولى:

$F(0,0,1)$ ، $B(0,0,0)$
$G(1,0,1)$ ، $C(1,0,0)$
3×9 $E(0,1,1)$ ، $A(0,1,0)$
$H(1,1,1)$ ، $D(1,1,0)$
$J(\frac{1}{2},0,1)$

M مركز ثقل المثلث FBG
3 $M\left(\frac{0+1+0}{3}, \frac{0+0+0}{3}, \frac{1+1+0}{3}\right)$

3 $\boxed{M\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)}$

N مركز ثقل المثلث ABE

$N\left(\frac{0+0+0}{3}, \frac{1+0+1}{3}, \frac{0+1+0}{3}\right)$

3 $\boxed{N\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

3 $\overrightarrow{MN}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ②
3 $\overrightarrow{BE}(0, 1, 1)$

3 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BE} = (-\frac{1}{3})(0) + (\frac{1}{3})(1) + (-\frac{1}{3})(1)$
3 $= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$

3 ومنه $\overrightarrow{MN}$ يعامد $\overrightarrow{BE}$

١٦

3 $\vec{FC}(1,0,-1)$

3 $\vec{MN}\cdot\vec{FC} = (-\frac{1}{3})(1)+(\frac{1}{3})(0)+(-\frac{1}{3})(-1)$

3 $= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$

3 ومنه $\vec{MN}$ يعامد $\vec{FC}$

3 (3) $\vec{FC}(1,0,-1)$

3 $\vec{BE}(0,1,1)$

نلاحظ أن شعاعي $\vec{BE}$ و $\vec{FC}$

غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما

غير متناسبة $(\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{1})$

3 فالمستقيمات (BE) و (FC) غير متوازية.

3 (4) $\vec{AC}(1,-1,0)$

3 $\vec{AH}(1,0,1)$

3 $\vec{FD}(1,1,-1)$

$\vec{FD}\cdot\vec{AC} = 1-1+0=0$

3 ومنه $\vec{AC} \perp \vec{FD}$

3 $\vec{FD}\cdot\vec{AH} = (1)(1)+(1)(0)+(-1)(1)$

$= 1-1=0$

3 ومنه $\vec{AH} \perp \vec{FD}$

ومنه $\vec{FD}$ ناظم للمستوي (ACH)

3 لأنه عمودي على شعاعين غير مرتبطين خطياً فيه

$(ACH): \begin{cases} A(0,1,0) \\ \vec{n}=\vec{FD}=(1,1,-1) \end{cases}$

$1(x-0)+1(y-1)-1(z-0)=0$

4 $\boxed{x+y-z-1=0}$

100

١٧

المسألة الثانية:

$f(x)=x^2-2x^2\ln x$

(1) نبحث نهايات f على $]0,+\infty[$

5+5 عند (0): $f(x)=x^2-2x(x\ln x)$

5 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

عند $+\infty$:

5+5 $f(x)=x^2(1-2\ln x)$

5 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

(2) f مستمر وقابل للاشتقاق على $]0,+\infty[$

5+5 $f'(x)=2x-2(2x\ln x+\frac{1}{x}x^2)$

$=2x-4x\ln x-2x$

$f'(x)=-4x\ln x$

$f'(x)=0$ نجد $x\ln x=0$

$x=0 \notin]0,+\infty[$ مرفوض

5 أو $\ln x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

5 $f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

(3) التقاطع مع $x'x$ نضع $f(x)=0$ ومنه

$x^2(1-2\ln x)=0$

5 إما $x^2=0 \Rightarrow x=0 \notin]0,+\infty[$ مرفوض

أو $1-2\ln x=0 \Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}$

5 $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$(\sqrt{e},0)$

5 $y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$

$f'(\sqrt{e}) = -4\sqrt{e}\,\frac{1}{2} = -2\sqrt{e}$

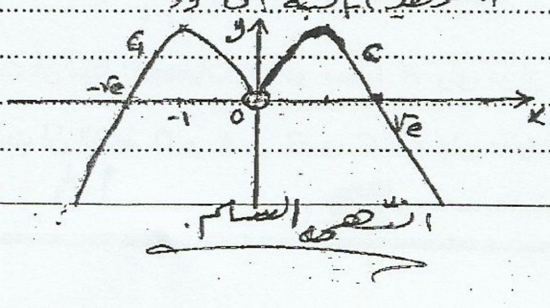
$y=-2\sqrt{e}(x-\sqrt{e})+0$

5 $\boxed{y=-2\sqrt{e}\,x+2e}$

5 (4) $f_1(x)=f(-x)$

C_1 نظير C بالنسبة إلى $y'y$

5+5



100

المصحح السالم