أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

① 2 $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$

2 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2 $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (ميل المقارب المائل)

2 $= 1$

② 2 $f(-2) = 0$

2 $f(2) = -1$

2 $f(3) = -2$

2 $f(5) = 0$

2 $f'(-2) = 0$

2 $f'(3) = 0$

$f'(5) = ?$

$f'(5)$ تعني هندسياً ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 5 حيث أن هذا المماس يمر بالنقطتين $(5,0)$ و $(4,-2)$

2 $m = \frac{-2-0}{4-5} = \frac{-2}{-1} = 2$

2 $f'(5) = 2$

③ 2 f ليس اشتقاقياً عند 0 لأن المماس شاقولي

2 f ليس اشتقاقياً عند 2 لأن f ليس مستمراً عند 2

2 f ليس اشتقاقياً عند 4 لأن للخط C نصفي مماس في النقطة التي فاصلتها 4.

④ عندما $f(x) \geq 0$

2×3 $x \in [-2, 0] \cup [1.5, 2[\cup [5, +\infty[$

عندما $f'(x) \leq 0$

2×2 $x \in [-\frac{1}{2}, 0[\cup]2, 4[$

40

السؤال الثاني:

$B(0,-1,-1)$ ، $A(1,1,1)$

① 3 $AM^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$

3 $BM^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2$

② $AM^2 - 2BM^2 = \lambda$

3 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - 2x^2 - 2(y+1)^2 - 2(z+1)^2 = \lambda$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1$

3 $-2x^2 - 2y^2 - 4y - 2 - 2z^2 - 4z - 2 = \lambda$

$-x^2 - 2x - y^2 - 6y - z^2 - 6z = \lambda + 1$

3 $x^2 + 2x + y^2 + 6y + z^2 + 6z = -\lambda - 1$

③ 3 $x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 + z^2 + 6z + 9 = -\lambda - 1 + 1 + 9 + 9$

3 $(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z+3)^2 = -\lambda + 18$

3 ندرس إشارة المقدار $-\lambda + 18$

ونعدمه $-\lambda + 18 = 0$

3 $\lambda = +18$

	λ	$-\infty$		-18		$+\infty$
3	$-\lambda+18$		+	0	−	
3+2+2	ما تمثله مجموعة النقاط		كرة مركزها $(-1,-3,-3)$ ونصف قطرها $\sqrt{-\lambda+18}$	نقطة وحيدة $(-1,-3,-3)$		$\emptyset$ مجموعة خالية من النقاط

40

٣

السؤال الثالث:

$e^2 x \ln x + e^2 x + 1 \geq 0$

4 $f(x) \geq 0$

حيث

4 $f(x) = e^2 x \ln x + e^2 x + 1$

لإثبات صحة المتراجحة $f(x) \geq 0$ يكفي أن نثبت

$x \in]0,+\infty[$ نسمي الطرف الأيسر التابع f على $]0,+\infty[$

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

4 $f'(x) = e^2(1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} x) + e^2$

$f'(x) = e^2 \ln x + e^2 + e^2$

$f'(x) = e^2 \ln x + 2e^2$

4 $f'(x) = e^2(\ln x + 2)$

عندما $f'(x) = 0$

4 $\ln x + 2 = 0$

$\ln x = -2$

4 $\boxed{x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}}$

4 $f(\frac{1}{e^2}) = e^2(\frac{1}{e^2})\ln e^{-2} + e^2 \frac{1}{e^2} + 1$

$= -2 + 1 + 1 = 0$

	x	0		$\frac{1}{e^2}$		$+\infty$
4	$f'(x)$		$-$	0	$+$	
4	$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4 نلاحظ أن $f(x) \geq 0$ أياً يكن $x \in]0,+\infty[$

وهي حلول المتراجحة المفروضة.

40

٤

السؤال الرابع:

(1) $|z - 3 + 2i| = |3 + 4i|$

5 $|z - (3 - 2i)| = |3 + 4i|$

5 $|z - z_A| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

5 $|z - z_A| = 5$

$\boxed{MA = 5}$

5 ومنه M تمثل دائرة مركزها A

ونصف قطرها 5

(2) $\left|\frac{z - 3 + 2i}{\bar{z} - 2}\right| = 1$

5 $\frac{|z - 3 + 2i|}{|\bar{z} - 2|} = 1$

5 $|z - (3 - 2i)| = |\bar{z} - 2|$

$|z - z_A| = |z - 2|$

5 $|z - z_A| = |z - z_B|$

$MA = MB$

5 ومنه M تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

أولاً: $f(x) = \frac{x+2}{|x|+1}$

نضع تابع معدل التغير للتابع f عند (0) وهو:

3 $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ المعرف على $\mathbb{R}^*$

3 $g(x) = \frac{\frac{x+2}{|x|+1} - 2}{x}$

3 $g(x) = \frac{x + 2 - 2|x| - 2}{x(|x|+1)}$

3 $g(x) = \frac{x - 2|x|}{x(|x|+1)}$

3 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2(-x)}{x(-x+1)} & ; x<0 \\ \dfrac{x-2x}{x(x+1)} & ; x>0 \end{cases}$

3 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{x(-x+1)} & ; x<0 \\ \dfrac{-x}{x(|x|+1)} & ; x>0 \end{cases}$

3 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{-x+1} & ; x<0 \\ \dfrac{-1}{x+1} & ; x>0 \end{cases}$

3 $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3}{-x+1} = 3 = f'(0^-)$

3 $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{x+1} = -1 = f'(0^+)$

نلاحظ أن

3 $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

3 ومنه f ليس اشتقاقياً عند الصفر.

معادلة نصف المماس من اليسار للنقطة ذات 0:

3 $y = f'(0^-)(x-0) + f(0)$

$y = 3(x-0) + 2$

3 $\boxed{y = 3x+2}$

ثانياً:

$f(x) = \cos\sqrt{x}$

نضع تابع معدل التغير للتابع f عند (0) وهو

3 $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x-0} \; ; x \in]0,+\infty[$

٥

3 $g(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x} - 1}{x}$

3 $g(x) = \dfrac{-(1-\cos\sqrt{x})}{x}$

3 $g(x) = \dfrac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x})^2}$

3 $g(x) = -2\left(\dfrac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}}\right)^2$

3 $g(x) = -2\left(\underbrace{\dfrac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{2\,\frac{\sqrt{x}}{2}}}_{\to 1}\right)^2$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\frac{\sqrt{x}}{2}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$

ومنه

3 $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{2} = f'(0)$

ومنه f اشتقاقي عند (0).

60 التمرين الثاني:

① $\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{GI}$

3 $= -\overrightarrow{IG}\cdot\overrightarrow{IG}$

$= -\|\overrightarrow{IG}\|\,\|\overrightarrow{IG}\|$

3 $= -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$

3 $\overrightarrow{IH}\cdot\overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GH})\cdot(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{CD})$

3 $= (\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GH})\cdot(-\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GH})$

3 $= (\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{IG})\cdot(\overrightarrow{GH}-\overrightarrow{IG})$

$= \overrightarrow{GH}^2 - \overrightarrow{IG}^2$

$= \|\overrightarrow{GH}\|^2 - \|\overrightarrow{IG}\|^2$

3 $= a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$

3 $= a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}$

3 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EB} = 0$

3 (لأنهما قطرا مربع متعامدان).

(2) $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

2 a. $A(0,0,0)$

2 $C(1,1,0)$

2 $H(0,1,1)$

2 $F(1,0,1)$

2 $G(1,1,1)$

2 $\vec{AG}(1,1,1)$

2 $\vec{CH}(-1,0,1)$

2 $\vec{CF}(0,-1,1)$

2 $\vec{AG}\cdot\vec{CH} = (1)(-1)+(0)(1)+(1)(1)=0$

2 ومنه $\vec{AG}$ يعامد $\vec{CH}$ ...... (I)

2 $\vec{AG}\cdot\vec{CF} = (1)(0)+(1)(-1)+(1)(1)=0$

2 ومنه $\vec{AG}$ يعامد $\vec{CF}$ ...... (II)

2 من (I) و (II) نستنتج أن $\vec{AG}$ عمودي على المستوي (CHF)

b. $(CHF): \begin{cases} C(1,1,0) \\ \vec{n} = \vec{AG}(1,1,1) \end{cases}$

4 $1(x-1)+1(y-1)+1(z-0)=0$

3 $\boxed{x+y+z-2=0}$

60

التمرين الثالث:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(1) $h(x) = f(\cos x)$

6 $h'(x) = (\cos x)' \cdot f'(\cos x)$

6 $= -\sin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

6 $h'(x) = -\sin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 x}}$

6 $h'(x) = -\sin x \cdot \dfrac{1}{|\sin x|}$

بما أن $x \in]-\pi, 0[$ فإن x تقع في الربع الثالث أو الرابع

ومنه $\sin x < 0$ في هذا المجال

6 وبالتالي $|\sin x| = -\sin x$

6 $h'(x) = -\sin x \cdot \dfrac{1}{-\sin x}$

6 $h'(x) = 1$

(2) باقتراض $f(0)=0$

بما أن f اشتقاقي عند 0 فإن

6 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

6 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-0}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0}} = 1$

6 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

60

التمرين الرابع :

(1) $(D ; \vec{DA} , \vec{DC} , \vec{DH})$

$H(0,0,1)$ ، $D(0,0,0)$

2+8 $E(1,0,1)$ ، $A(1,0,0)$

$G(0,1,1)$ ، $C(0,1,0)$

$F(1,1,1)$ ، $B(1,1,0)$

نفرض $M(x,y,z)$

2 $\vec{DM} = \frac{2}{3}\vec{DF}$

$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

ومنه

2 $M\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\vec{DN} = \frac{1}{3}\vec{DF}$

نفرض $N(x,y,z)$

2 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2 ومنه $N\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

(2)

2 $\vec{NE}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

2 $\vec{NB}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

2 $\vec{NE}\cdot\vec{NB} = \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$

2 $= -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 0$

2 فالشعاعان $\vec{NB}$ و $\vec{NE}$ متعامدان

فالمثلث NEB قائم في N

7

2 $NE = \|\vec{NE}\| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = 1$

2 $NB = \|\vec{NB}\| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = 1$

2 $NE = NB = 1$

2 فأصبح المثلث NEB قائم في N ومتساوي الساقين.

(3)

2 $\cos E\hat{M}B = \frac{\vec{ME}\cdot\vec{MB}}{\|\vec{ME}\|\cdot\|\vec{MB}\|}$

2 $\vec{ME}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

2 $\vec{MB}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

2 2 $\cos(E\hat{M}B) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}}$ 2

2 $\cos(E\hat{M}B) = \frac{\frac{1}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}}{\frac{6}{9}}$

2 $= \frac{-\frac{3}{9}}{\frac{6}{9}} = -\frac{1}{2}$

2 $\cos E\hat{M}B = -\frac{1}{2}$

ومنه $E\hat{M}B = \frac{2\pi}{3}$

2 أو $\boxed{E\hat{M}B = 120^\circ}$

60

السؤال الثالث: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

(1) $R(B) = E$

$A, \frac{\pi}{2}$

ومنه

4 $e - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a)$

$e - 0 = -i(b-0)$

4 $\boxed{e = -ib}$

$R(C) = D$

$A, \frac{\pi}{2}$

4 $d - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)$

$d - 0 = i(c-0)$

4 $\boxed{d = ic}$

M منتصف $[BC]$ ومنه

4 $\boxed{m = \frac{b+c}{2}}$

N منتصف $[DC]$ ومنه

4 $n = \frac{d+c}{2}$

4 $\boxed{n = \frac{ic+c}{2}}$

P منتصف $[DE]$ ومنه

4 $p = \frac{d+e}{2}$

4 $\boxed{p = \frac{ic-ib}{2}}$

Q منتصف $[EB]$ ومنه

4 $q = \frac{e+b}{2} = \frac{-ib+b}{2}$

4 $\boxed{q = \frac{b-ib}{2}}$

٨

(2)

4 $q - m = \frac{b-ib}{2} - \frac{b+c}{2}$

4 $\boxed{q - m = \frac{-ib-c}{2}}$

4 $i(n-m) = i\left(\frac{ic+c}{2} - \frac{b+c}{2}\right)$

$= i\left(\frac{ic-b}{2}\right)$

4 $= \frac{-c-ib}{2}$

4 ومنه $q - m = i(n-m)$

4 نلاحظ أن Q هي صورة N وفق دوران مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ما يثبت أن NMQ قائم في M

4 ومتساوي الساقين

4 $n + q = \frac{ic+c+b-ib}{2}$

4 $m + p = \frac{b+c+ic-ib}{2}$ $\Rightarrow$

4 $n + q = m + p$

4 $\frac{n+q}{2} = \frac{m+p}{2}$

أي منتصف القطعة المستقيمة $[NQ]$

هو نفسه منتصف القطعة المستقيمة $[MP]$

4 أي قطرا الرباعي MNPQ متناصفان

4 فهو متوازي أضلاع وفيه زاوية قائمة

$\hat{M} = \frac{\pi}{2}$ فهو مستطيل وفيه ضلعان متجاوران

4 متساويان MN=MQ فهو مربع.

100

المسألة الثانية :

أولاً : ليكن التابع : $g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

3 (1 (a $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

إثبات أن $\Delta : y = 2x$ مقارب مائل

$f(x) - y_\Delta = \sqrt{x^2+1} - x$

نضرب بالمرافق ونقسم عليه :

3 $f(x) - y_\Delta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

3 $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

3 ومنه $\Delta : y = 2x$ مقارب مائل للخط C_g بجوار $+\infty$

(b نحسب نهاية $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

عدم تعيين من الشكل $-\infty+\infty$ نزيل التعيين

$g(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

نضرب بالمرافق ونقسم عليه

3 $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$

3 $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$

والتأويل الهندسي لهذه النتيجة هي أن

3 مستقيم مقارب أفقي للخط C_g عند $-\infty$: $\boxed{y=0}$

(2 g معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

3 $g'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

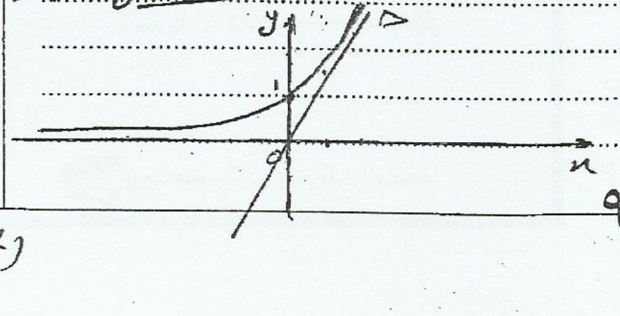
3 $g'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$

لأن $\sqrt{x^2+1} > -x$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$

3
3
3

3 + 3



9

ثانياً : $f(x) = \ln(g(x))$

3 (1 $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$

3 ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to 0} \ln X = -\infty$

3 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

3 ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$

(2 $f(x) + f(-x) =$

3 $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$

3 $= \ln((\sqrt{x^2+1} + x)\cdot(\sqrt{x^2+1} - x))$

3 $= \ln(x^2+1-x^2) = \ln 1 = 0$

$f(x) + f(-x) = 0$

3 $\boxed{f(-x) = -f(x)}$

وبما أن $x \in \mathbb{R}$ يكون $-x \in \mathbb{R}$ مجموعة متناظرة

3 فإن f تابع فردي

3 ومنه الخط البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات

(3 f اشتقاقي على $\mathbb{R}$

3 $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

3 $= \dfrac{\cancel{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}}{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}$

3 $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3
3
3

(4 معادلة المماس للخط C_f في مبدأ الإحداثيات :

3 $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = 1\cdot(x-0) + 0$

4 $d : \boxed{y = x}$

60