D	شتاء 2021/2020	سلم تصحيح الامتحان الفصلي لمادة الرياضيات

أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

(1) f معرّفة على $]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

2 ومنه $\boxed{y=2}$ مستقيم مقارب أفقي

2 $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = 0$

2 $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$

2 ومنه $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

2 ومنه $\boxed{y=-1}$ مستقيم مقارب أفقي

2 (2) لا يقبل الخط f مقاربات مائلة

2 لوجود مقارب أفقي في جوار $-\infty$ ومقارب أفقي في جوار $+\infty$

حيث $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

2 (3) في المجال $]-\infty,-1[$ يكون f مستمراً عليه

2 $f(]-\infty,-1[) =]0,3]$

2 و $0 \notin]0,3]$

2 فليس للمعادلة $f(x)=0$ أي حلول في المجال $]-\infty,-1[$

2 في المجال $]-1,+\infty[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه

2 $f(]-1,+\infty[) =]-1,+\infty[$

2 و $0 \in]-1,+\infty[$

2 فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]-1,+\infty[$

2 ومنه نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

2 (4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = (-1)^+$

2 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim\limits_{X\to(-1)^+} f(X) = +\infty$

40

السؤال الثاني:

$f(x) = x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

5+5 $f(x) - y_D = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$

5 $f(x) - y_D = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - 1$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

5+5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - y_D\right) = 1 - 1 = 0$

5 ومنه $D: y = x+1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

40

السؤال الثالث:

5 $\vec{IJ} = \vec{IE} + \vec{EA} + \vec{AJ}$

5 $\vec{IJ} = \vec{IH} + \vec{HB} + \vec{BJ}$

بالجمع:

5+5+5 $2\vec{IJ} = \vec{0} + \vec{EA} + \vec{HB} + \vec{0}$

5 $2\vec{IJ} = -\vec{AE} - \vec{BH}$

5 $\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AE} - \frac{1}{2}\vec{BH}$

5 فالأشعة $\vec{IJ}$ و $\vec{AE}$ و $\vec{BH}$ مرتبطة خطياً

40

السؤال الرابع:

$a = 3\sqrt{3} + 2i$

$b = 2\sqrt{3} + i$

$c = 4 + 3i$

$d = 3 + 4i$

5 $(\vec{DC}, \vec{BA}) = \arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)$

5 $= \arg\left(\frac{3\sqrt{3}+2i-2\sqrt{3}-i}{4+3i-3-4i}\right)$

5 $= \arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)$

5 5 $= \arg\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)$

5 $= \arg\left(\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)$

5 5 $= \arg\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{12}}\right) = \frac{5\pi}{12}$

40

٣١

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

(1) $\vec{CK}(x_K, y_K, z_K - 5)$

2 $\vec{CD}(5, 5, -5)$

$\vec{CK} = 0.6\,\vec{CD}$

2 $\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K - 5 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

ومنه

2 $x_K = 3$

2 $y_K = 3$

2 $z_K = 2$

2 $K(3, 3, 2)$

2 $\vec{BA}(7, -7, -7)$

2 $\vec{BL}(x_L, y_L - 4, z_L - 7)$

$\vec{BA} = 7\vec{BL}$

2 $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} x_L \\ y_L - 4 \\ z_L - 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_L \\ y_L - 4 \\ z_L - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2 $x_L = 1$

2 $y_L = 3$

2 $z_L = 6$

$L(1, 3, 6)$

2 $\vec{LK}(2, 0, -4)$

2 $\vec{LG}\left(\frac{1}{2}, 0, -1\right)$

2 نلاحظ أن: $\vec{LK} = 4\vec{LG}$

فالشعاعان $\vec{LK}$ و $\vec{LG}$ مرتبطان خطياً

فالنقاط L و K و G تقع على استقامة واحدة

40

التمرين الثاني :

① $g(x) = \frac{E(x)}{x}$

4+4 $x-1 < E(x) \leq x$

بما أن x في جوار ∞+ بإذاً بقسمة المتراجحة على x لا تتغير جهة التراجح

4+4 $\frac{x-1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leq 1$

$\frac{x-1}{x} < g(x) \leq 1$

4 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

4 $\lim_{x \to +\infty} 1 = 1$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد

4 $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

② $f(x) = x - E(x)$

4 4 4 $f(x) = \begin{cases} x & ; 0 \leq x < 1 \\ x-1 & ; 1 \leq x < 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}$

4 $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x) = 1$

4 $f(1) = 1 - 1 = 0$

4 نلاحظ أن $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq f(1)$

4 ومنه f ليس مستمراً عند 1

4 وبالتالي f ليس مستمراً على $[0,2]$

60

---

3 ② $\vec{AC}(-7, 3, 5)$

3 $\vec{AD}(-2, 8, 0)$

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{AD}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{-7}{-2} \neq \frac{3}{8}\right)$

فالنقاط A و C و D ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستوٍ واحد

حتى تنتمي النقطة $M(1, m, 10)$ إلى المستوي ACD يجب أن نجد عددين حقيقيين α و β حيث

3 $\vec{AM} = \alpha\vec{AC} + \beta\vec{AD}$

3 $\begin{pmatrix} -6 \\ m+3 \\ 10 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 $\begin{cases} -7\alpha - 2\beta = -6 & (1) \\ 3\alpha + 8\beta = m+3 & (2) \\ 5\alpha = 10 & (3) \end{cases}$

لنحل (1) و (3)

3 من (3) نجد أن $\boxed{\alpha = 2}$

نعوض في (1)

$-14 - 2\beta = -6$

3 $-2\beta = 8$

$\boxed{\beta = -4}$

يجب أن تحقق المعادلة (2)

3 $3(2) + 8(-4) = m + 3$

3 $6 - 32 = m + 3$

$-26 = m + 3$

3 $\boxed{m = -29}$

$M(1, -29, 10)$ تنتمي إلى المستوي (ACD)

60

التمرين الثالث :

$f(x) = \frac{4}{(x-2)^2}$

4 $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$ ①

$f(x) > 10^4$

4 $\frac{4}{(x-2)^2} > 10^4$

4 $\frac{(x-2)^2}{4} < 10^{-4}$

4 $(x-2)^2 < 4 \cdot 10^{-4}$

4 $|x-2| < 2 \cdot 10^{-2}$

$|x-2| < 0.02$

$-0.02 < x-2 < 0.02$

4 $2-0.02 < x < 2+0.02$

$x \in]2-0.02,\ 2+0.02[$

4 ومنه $\boxed{\alpha = 0.02}$

إذا :

$f(x) > 10^4$ لما $x \in]2-0.02,\ 2+0.02[$ ½

4 ② f اشتقاقية على $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

4 $f(x) = 4(x-2)^{-2}$

4 $f'(x) = -8(x-2)^{-3}(1)$

4 $f'(x) = \frac{-8}{(x-2)^3}$

4 $g(x) = f(\sin x)$

4 $g'(x) = (\sin x)' \cdot f'(\sin x)$

4+4 $= \cos x \times \frac{-8}{(\sin x - 2)^3}$

60

التمرين الرابع :

$(D;\ \vec{DA},\ \frac{1}{2}\vec{DC},\ \vec{DH})$

5 $I(\frac{1}{2}, 0, 1)$

5 $J(0, 1, \frac{1}{2})$

5 $K(1, \frac{1}{2}, 1)$

5 $\vec{IJ}(\frac{-1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$

5 $\vec{IK}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

5 $\vec{IJ} \cdot \vec{IK} = (-\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (1)(\frac{1}{2})$

5 $= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$IK = \|\vec{IK}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}$

5 $= \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

5 $IJ = \|\vec{IJ}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

5 $\vec{IJ} \cdot \vec{IK} = \|\vec{IJ}\| \cdot \|\vec{IK}\| \cos(\widehat{JIK})$

5 $\cos(\widehat{JIK}) = \frac{\vec{IJ} \cdot \vec{IK}}{\|\vec{IJ}\| \cdot \|\vec{IK}\|}$

$\cos(\widehat{JIK}) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}}$

5 $\boxed{\cos(\widehat{JIK}) = \frac{1}{2\sqrt{3}}}$

60

ثانياً: حل كلاً من المسائل الآتية:

المسألة الأولى:

$P(Z) = Z^3 + (14 - i\sqrt{2})Z^2 + (74 - 14i\sqrt{2})Z - 74i$

(1) نثبت أن $(i\sqrt{2})$ جذر للمعادلة $P(Z) = 0$

3 $(i\sqrt{2})^3 + (14 - i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + (74 - 14i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) - 74i$

3 $-2\sqrt{2}i - 28 + 2\sqrt{2}i + 74\sqrt{2}i + 28 - 74i\sqrt{2}$

3 $= 0$

ومنه $P(Z) = 0$ جذر للمعادلة $i\sqrt{2}$

(2) (a $P(Z) = (Z - i\sqrt{2})(Z^2 + aZ + b)$

3 $= Z^3 + aZ^2 + bZ - i\sqrt{2}Z^2 - ia\sqrt{2}Z - i\sqrt{2}b$

3 $= Z^3 + (a - i\sqrt{2})Z^2 + (b - a\sqrt{2}i)Z - i\sqrt{2}b$

بالمطابقة مع الفرض نجد

3 $a - i\sqrt{2} = 14 - i\sqrt{2}$ (1)

3 $b - a\sqrt{2}i = 74 - 14i\sqrt{2}$ (2)

3 $-i\sqrt{2}b = -74i\sqrt{2}$ (3)

3 من (1) نجد أن $\boxed{a = 14}$

3 من (3) نجد أن $\boxed{b = 74}$

نتحقق بالتعويض في (2)

3 $74 - 14\sqrt{2}i = 74 - 14i\sqrt{2}$

محققة

3 $P(Z) = (Z - i\sqrt{2})(Z^2 + 14Z + 74)$

(b $P(Z) = 0$

$(Z - i\sqrt{2})(Z^2 + 14Z + 74) = 0$

2 إما $\boxed{Z = i\sqrt{2}}$

٣٤

أو $Z^2 + 14Z + 74 = 0$

3 $\Delta = b^2 - 4ac = (14)^2 - 4(1)(74)$

3 $= 196 - 296$

$\Delta = -100 < 0$

$\sqrt{-\Delta} = 10$ للمعادلة جذران عقديان هما

3 $Z_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{-14 + 10i}{2}$

3 $\boxed{Z_2 = -7 + 5i}$

3 $\boxed{Z_3 = \overline{Z_2} = -7 - 5i}$

(3) (a

3 $Z_C = e^{-i\frac{\pi}{4}} Z_I$

3 $Z_C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)(i\sqrt{2})$

$Z_C = \frac{2i}{2} + 1 = 1 + i$

3 $\boxed{Z_C = 1 + i}$

(b

3 $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$

$Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$

$Z_D = Z_C + Z_A - Z_B$

$Z_D = 1 + i - 7 + 5i + 7 + 5i$

3 $\boxed{Z_D = 1 + 11i}$

(c

3 $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B} = \frac{-7 + 5i - 1 - i}{1 + 11i + 7 + 5i}$

3 $= \frac{-8 + 4i}{8 + 16i} = \frac{-2 + i}{2 + 4i}$

3 $= \frac{(-2 + i)(2 - 4i)}{4 + 16} = \frac{10i}{20}$

3 $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B} = \frac{1}{2}i$

3+3 $\left|\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}\right| = \frac{1}{2}$ $\quad \arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$

3+3 $\frac{CA}{BD} = \frac{1}{2}$ $\quad (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$

$CA = \frac{1}{2}BD$

3+3 نجد الرباعي ABCD فيه قطراه متعامدان

2 وغير متساويين فهو معين

100

المسألة الثانية:

$f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

4 ① أ) لدينا $x\in D_f$ ثم $-x\in D_f$

لأن $x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

4 $-x\in]2,+\infty[\cup]-\infty,-2[=D_f$

ب)

4 $f(-x)=\ln\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right)$

4 $=\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

4 $=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-1}=-\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

$=-f(x)$

4 $f(-x)=-f(x)$

ما شرطا 2 محقق

ومنه f تابع فردي:

4 ومنه المبدأ نقطة تناظر بالنسبة للخط C $O(0,0)$

② f مستمر على $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=1$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to1}\ln X=0$

4 ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي

في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=1$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{X\to1}\ln X=0$

$\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to(-2)^-}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=+\infty$

4 $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$

ومنه

4 ٣٥ $\boxed{x=-2}$ مستقيم مقارب شاقولي

$\lim\limits_{x\to2^+}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=0$

4 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{X\to0}\ln X=-\infty$

4 ومنه $\boxed{x=2}$ مستقيم مقارب شاقولي:

4 ③ f اشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

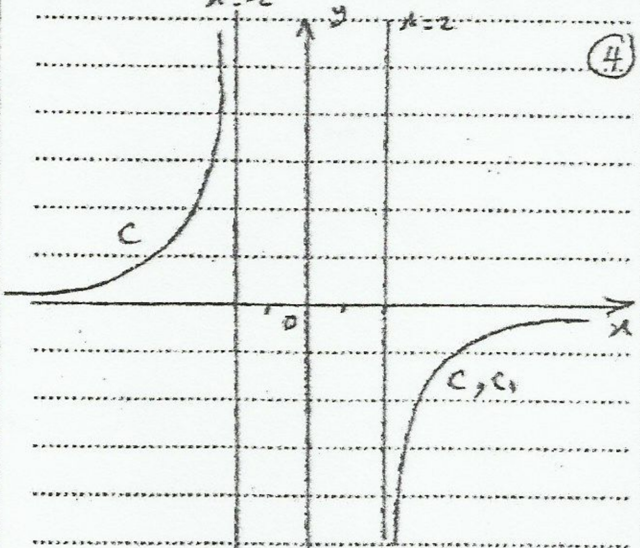
4 $f'(x)=\dfrac{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)'}{\frac{x-2}{x+2}}$

4 $f'(x)=\dfrac{\frac{1(x+2)-1(x-2)}{(x+2)^2}}{\frac{x-2}{x+2}}$

4 $f'(x)=\dfrac{4}{(x-2)(x+2)}>0$

4 ومنه f متزايد تماماً على كل من مجالي D_f

④



4 + 4 + 4

$f_1(x)=\ln(x-2)-\ln(x+2)$

4 f_1 معرف عندما $x-2>0$ و $x+2>0$

$x>-2$ و $x>2$

$x\in]-2,+\infty[\cap]2,+\infty[$

4 $x\in]2,+\infty[$

4 $f_1(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=f(x)$

حيث $x\in]2,+\infty[$

ومنه f_1 و f متطابقان على $]2,+\infty[$

C_1 هو جزء من الخط C الواقع في المجال $]2,+\infty[$

100 انتهت الأجوبة