أولاً: أجيبي عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول:

(1) f معرّف على $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، 2

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ 2

ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي 3

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ ، 2

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$ 2

$\boxed{x=2}$ مستقيم مقارب شاقولي 3

(2) $f(-1) = 2$ 2

$f(1) = 0$ 2

$f(4) = -1$ 2

$f'(-1) = 0$ 2

$f'(1) = 0$ 2

$f'(4) = ?$

نلاحظ أن المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 4 يمر بالنقطتين $(0,-2)$ و $(4,-1)$

$m = \frac{-1-(-2)}{4-0} = \frac{1}{4}$ 3

ومنه $f'(4) = \frac{1}{4}$ 3

(3) مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$ هي $x \in]2, +\infty[\cup \{1\}$ 3+3

(4) مجموعة حلول المتراجحة $f'(x) \leq 0$ هي $x \in [-1, 1]$ 4

40

السؤال الثاني:

(1) $\vec{DC}(3, -2, 0)$ 4

$\vec{AB}(2, 3, 3)$ 4

$\vec{DC} \cdot \vec{AB} = (3)(2) + (-2)(3) + (0)(3)$ 4

$= 6 - 6 = 0$

ومنه المستقيم $(AB) \perp (DC)$ 4

(2) $\vec{AB}(2, 3, 3)$ 4

$\vec{AC}(3, \frac{9}{2}, \frac{9}{2})$ 4

نلاحظ أن:

$\vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{AB}$ 4

فالشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطان خطياً 4

فالنقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة

أي النقطة C تقع على المستقيم (AB) 4

ومنه المسقط القائم للنقطة D على المستقيم (AB). 4

40

السؤال الثالث:

$\ln(2-x) - \ln(\sqrt{2x-3}) = \frac{1}{2}\ln(x-1)$

نوجد مجموعة تعريف المعادلة:

$2-x>0$ و $2x-3>0$ و $x-1>0$

4

$x<2$ و $x>\frac{3}{2}$ و $x>1$

$x\in]1,+\infty[\cap]\frac{3}{2},+\infty[\cap]-\infty,2[$

$x\in]\frac{3}{2},2[$

4 $D_1=]\frac{3}{2},2[$

نطبق خواص اللوغاريتم:

بالضرب بالعدد (2)

4 $2\ln(2-x)-2\ln(\sqrt{2x-3})=\ln(x-1)$

4 $\ln(2-x)^2-\ln(2x-3)=\ln(x-1)$

4 $\ln\left(\frac{(2-x)^2}{2x-3}\right)=\ln(x-1)$

$\frac{(2-x)^2}{2x-3}=x-1$

4 $(2-x)^2=(2x-3)(x-1)$

$4-4x+x^2=2x^2-5x+3$

4 $x^2-x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac$

$=(-1)^2-4(1)(-1)$

$=1+4=5$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$

4

4 إما $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\in D_1$ مقبول

4 أو $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\notin D_1$ مرفوض

ومنه $S=\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

40

السؤال الرابع:

$Z=\frac{z-i}{z+1-i}$

4 يكون Z حقيقياً إذا كان $\bar{Z}=Z$

4 $\overline{\left(\frac{z-i}{z+1-i}\right)}=\frac{z-i}{z+1-i}$

4 $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1+i}=\frac{z-i}{z+1-i}$

4 $(\bar{z}+i)(z+1-i)=(z-i)(\bar{z}+1+i)$

$\bar{z}z+\bar{z}-i\bar{z}+iz+i+1=$

$z\bar{z}+z+iz-i\bar{z}-i+1$

4 $\bar{z}+i=z-i$

4 $z-\bar{z}-2i=0$

$2yi-2i=0$

4 $2i(y-1)=0$

$y-1=0$

4 $\boxed{y=1}$

4 مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل المستقيم $y=1$

4 محذوف منه النقطة $(-1,1)$

(لأنه لا يعرف $z\neq -1+i$)

40

ثانياً: حل التمارين الأربع الآتية:

التمرين الأول:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$$

(1) f مستمرة ومتناقصة تماماً على $]1,+\infty[$

5 $\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty$

5 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

5+5 $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}<0$

5

x	1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

5

5 (2) f مستمرة ومتناقصة تماماً على $]1,+\infty[$

5 $f(]1,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

5 $0\in]-\infty,+\infty[$

فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α حقيقة $\alpha\in]1,+\infty[$

لإثبات أن $\alpha\in]1,2[$

$f(2)=1-\sqrt{2}<0$

5 $0\in f(]1,2[)=]1-\sqrt{2},+\infty[$

5 فالحل وحيد α للمعادلة $f(x)=0$ حقيقة $\alpha\in]1,2[$

60

التمرين الثاني:

(1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & : x\neq 0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$

عندما $x\neq 0$ يكون

$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$

5+5 $|f(x)|=|x\sin\frac{1}{x}|=|x||\sin\frac{1}{x}|\leq |x|(1)$

$x\neq 0$ عند $|f(x)|\leq |x|$

عند $x=0$ المتباينة محققة عند (0)

$|f(0)=0|\leq|0|$ أي

$0\leq 0$ محققة

صحيحة f

إذن $|f(x)|\leq|x|$ لكل $x\in\mathbb{R}$

$|f(x)-0|\leq|x|$

5 $\lim_{x\to 0}|x|=0$

5 باستخدام مبرهنة الإحاطة (2) يكون

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$

5 (2) بما أن $\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$

5 فإن f مستمرة عند (0)

الدالة $x\mapsto x\sin\frac{1}{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}^*$

5 لأنها عبارة عن جداء دالتين مستمرتين

وبالتالي f مستمرة عند الصفر

5 إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$.

(3) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$

5 $f(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

5+5+5 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{X\to 0}\frac{\sin X}{X}=1$

60

التمرين الثالث:

$$f(x) = \frac{x}{|x|+3}$$

① نضع تـ.ح معدل التغير للتابع f عند (0) وهو g المعرف على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ — 3 + 3

$$g(x) = \frac{\frac{x}{|x|+3} - 0}{x-0}$$ — 3 + 3

$$g(x) = \frac{1}{|x|+3}$$ — 3

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{3} = f'(0)$$ — 3

ومنه f اشتقاقي عند (0). — 3

معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها (0) هي:

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$ — 3

$$y = \frac{1}{3}(x-0) + 0$$ — 3

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x}$$ — 3

② في جوار $-\infty$ يكون $|x| = -x$

$$f(x) = \frac{x}{-x+3}$$ — 3

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x}{-x}\right) = -1$$ — 3

$$f(x) \in\ ]-1.05\,,\,-0.95[$$ — 3

يكافئ : نستنتج $|f(x) -$ النهاية $| <$ المجال

$$|f(x) - (-1)| < 0.05$$ — 3

$$|f(x)+1| < \frac{5}{100}$$ — 3

$$\left|\frac{x}{-x+3}+1\right| < \frac{1}{20}$$

$$\left|\frac{x-x+3}{-x+3}\right| < \frac{1}{20}$$ — 3

$$\left|\frac{3}{-x+3}\right| < \frac{1}{20}$$

$$\frac{|3|}{|-x+3|} < \frac{1}{20}$$

$$\frac{3}{|-x+3|} < \frac{1}{20}$$ — 3

$$\frac{|-x+3|}{3} > 20$$ — 3

$$|-x+3| > 60$$ — 3

علماً أن x في جوار $-\infty$ فإن:

$$|-x+3| = -x+3$$

$$-x+3 > 60$$

$$-x > 57$$

$$\boxed{x < -57}$$ — 3

ومنه $\boxed{A = -57}$

أو أي عدد أصغر منه.

60

التمرين الرابع:

(1) $\frac{e-a}{b-a}=\frac{\frac72+\frac{3\sqrt3}{2}i-2}{5-2}$ 4

$=\frac{\frac32+\frac{3\sqrt3}{2}i}{3}$ 4

$=\frac12+\frac{\sqrt3}{2}i$

$=e^{i\frac{\pi}{3}}$ 4

$\frac{e-a}{b-a}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\arg\left(\frac{e-a}{b-a}\right)=\frac{\pi}{3}$ 4

(1) $(\vec{AB},\vec{AE})=\frac{\pi}{3}$ 4

$\left|\frac{e-a}{b-a}\right|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|$ 4

$\frac{|e-a|}{|b-a|}=1$

$\frac{AE}{AB}=1$

(2) $AE=AB$ 4

من (1) و (2) نستنتج أن: ABE

متساوي الساقين فيه زاوية 60° 4

فهو متساوي الأضلاع

(2) $\frac{f-d}{e-d}=\frac{\frac{10+3\sqrt3}{2}+\frac32 i-2-3i}{\frac72+\frac{3\sqrt3}{2}i-2-3i}$ 4

$=\frac{\frac{5+3\sqrt3}{2}+\frac32 i-2-3i}{\frac32+\frac{3\sqrt3}{2}i-3i}$ 4

$=\frac{\left(\frac{3+3\sqrt3}{2}\right)+\left(-\frac32\right)i}{\left(\frac32\right)+\left(\frac{3\sqrt3}{2}-3\right)i}$

25

نضرب بسط ومقام بمرافق المقام

9 $=\frac{\left(\frac{3+3\sqrt3}{2}-\frac32 i\right)\left(\frac32-\left(\frac{3\sqrt3}{2}-3\right)i\right)}{\frac94+\left(\frac{3\sqrt3}{2}-3\right)^2}$ 4 4

$=\frac{\left(\frac{3+3\sqrt3}{2}-\frac32 i\right)\left(\frac32-\frac{3\sqrt3}{2}i+3i\right)}{\frac94+\left(\frac{3\sqrt3}{2}-3\right)^2}$ 4 4

$=\frac{\frac92-\frac{9\sqrt3}{2}i+9i+\frac{9\sqrt3}{2}-\frac{27}{2}i+\frac{9\sqrt3}{2}i-\frac94 i-\frac{3\sqrt3}{4}+\frac92}{\frac94+\left(\frac{3\sqrt3}{2}-3\right)^2}$ 4

4 $=\frac{\frac{9+15\sqrt3}{4}}{\frac94+\left(\frac{3\sqrt3}{2}-3\right)^2}\in\mathbb{R}$ 4

وهو موجب 4

$\arg\left(\frac{f-d}{e-d}\right)=0$ أي: 4

$(\vec{DE},\vec{DF})=0$

4 فالشعاعان $\vec{DE}$ و $\vec{DF}$ مرتبطان خطياً

فالنقاط D و E و F تقع على

استقامة واحدة 4

60

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

1) $B(3,0,0)$ 4

$C(3,3,0)$ 4

$D(0,3,0)$ 4

$E(0,0,6)$ 4

2) O منتصف $[AC]$ 4

$O\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ 4

$\overrightarrow{EO}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -6\right)$ 4

$\overrightarrow{BD}(-3, 3, 0)$

$\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{BD} = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 0$ 4

ومنه $(BD) \perp (EO)$ 4

$S(DBE) = \frac{1}{2}\, BD \cdot EO$

قطر المربع: $\boxed{BD = 3\sqrt{2}}$ 4

$EO = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-0\right)^2 + (0-6)^2}$ 4

$EO = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 36}$

$= \sqrt{\frac{9}{2} + 36} = \sqrt{\frac{81}{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$

$S(DBE) = \frac{1}{2}\, 3\sqrt{2} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{27}{2}$ 4

3) a) $G\left(\frac{3+0+0}{3}, \frac{3+3+0}{3}, \frac{0+0+6}{3}\right)$

$G(1, 2, 2)$ 4

$\overrightarrow{BE}(-3, 0, 6)$ 4

$\overrightarrow{AG}(1, 2, 2)$ 4

$\overrightarrow{AO}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ 4

b) حتى يكون المستقيم (BE) يوازي المستوي (AGO) يجب أن نثبت أن الأشعة $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AG}$ ، $\overrightarrow{AO}$ مرتبطة خطياً.

نثبت وجود عددين حقيقيين α ، β يحققان

$\overrightarrow{BE} = \alpha\,\overrightarrow{AG} + \beta\,\overrightarrow{AO}$

4 $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

4 $\begin{cases} \alpha + \frac{3}{2}\beta = -3 & (1) \\ 2\alpha + \frac{3}{2}\beta = 0 & (2) \\ 2\alpha = 6 & (3) \end{cases}$

4 لنأخذ المعادلتين (3) ، (2)

من (3) نجد أن $\boxed{\alpha = 3}$

نعوض في (2)

$6 + \frac{3}{2}\beta = 0$

4 $\frac{3}{2}\beta = -6$

$\boxed{\beta = -4}$

نتحقق بالتعويض في (1)

4 $3 + \frac{3}{2}(-4) \stackrel{?}{=} -3$

$3 - 6 = -3$

$-3 = -3$ محققة

4 $\overrightarrow{BE} = 3\,\overrightarrow{AG} - 4\,\overrightarrow{AO}$

فالأشعة $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AO}$ مرتبطة خطياً

4 فالمستقيم (BE) يوازي المستوي (AGO).

4) $r = BC = 3$

$h = 3$

محوره (ox)

$0 \le x \le 3$ و $y^2 + z^2 - \frac{9}{9}x^2 = 0$ 4

4/4 $0 \le x \le 3$ و $y^2 + z^2 - x^2 = 0$ 4

100

المسألة الثانية:

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

1) a.

$$\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = \frac{-\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + -\left(\frac{1-x}{2}\right) + \ln\left(\frac{-x}{1-x}\right)}{2}$$

$$= \frac{-\cancel{\frac{x}{2}} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{1}{2} + \cancel{\frac{x}{2}} + \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}{2}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}$$

b)

أ) $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ نبين أن

ب) $1-x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

عندما $x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$-x \in]0,+\infty[\cup]-\infty,-1[$

$1-x \in]1,+\infty[\cup]-\infty,0[= I$

$f(2a-x)+f(x) = 2b$

$f(1-x)+f(x) = -\frac{1}{2}$

نحقق حسب المطلوب

حيث أثبتنا

$$\frac{f(1-x)+f(x)}{2} = -\frac{1}{4}$$

ومنه $f(1-x)+f(x) = 2\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

فالنقطة $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للخط C

2) f مستمرة و اشتقاقية على

$]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=0}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=1}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1(x)-(x-1)}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{-x(x-1)+2}{2x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$$

لما $f'(x)=0$: $-x^2+x+2=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

إما $\boxed{x=2}$, $f(2) = -1-\ln 2$

أو $\boxed{x=-1}$, $f(-1) = \frac{1}{2}+\ln 2$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖		‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}+\ln 2$	↗	$+\infty$ ‖		‖ $-\infty$	↗	$-1-\ln 2$	↘	$-\infty$

3) $f(x) - y_d = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d) = \lim_{X\to 1} \ln X = 0$

ومنه $d: y=-\frac{x}{2}$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$ ، $+\infty$

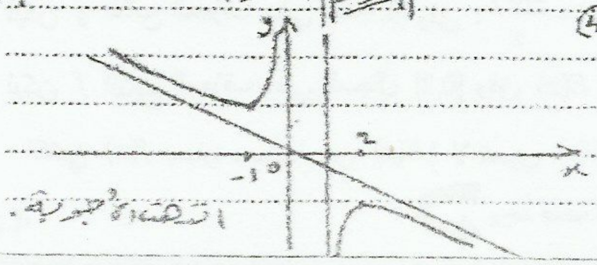
لدراسة وضع C بالنسبة إلى d ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y_d = 0$

عندما $\frac{x-1}{x} = 1$ ومنه $-1=0$ مستحيلة.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-y_d$		$+$	‖		‖	$-$	
الوضع النسبي		C يقع فوق d	‖		‖	C يقع تحت d	

4)



التمثيلة البيانية.