أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

① f معرّف على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

2 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

2 $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

2 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

2 $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي

2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ومنه

2 $y=0$ مستقيم مقارب أفقي

② 2 $f(-2)=2$

2 $f(2)=1$

2 $f(1)=0$

2 $f'(-2)=0$

2 $f'(2)=0$

$f'(1)=?$

إن $f'(1)$ تعني هندسياً ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 1 ونلاحظ أن هذا المماس يمر بالنقطة $(1,0)$ و $(0,-4)$

2 $m = \frac{0-(-4)}{1-0} = 4$

3 ومنه $f'(1)=4$

③ المستقيم Δ يمر بالنقطتين $O(0,0)$ و $(-2,1)$

2 $m_\Delta = \frac{1-0}{-2-0} = -\frac{1}{2}$

2 $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$

3 $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a = -\frac{1}{2}$

ميل المقارب المائل

④ 2+2 $f(\mathbb{R}^*) =]-\infty,1]\cup[2,+\infty[$

40

السؤال الثاني:

$\vec{SA}\cdot\vec{SB} = \|\vec{SA}\|\,\|\vec{SB}\|\cos\frac{\pi}{3}$

4 $= a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

4 $\vec{AH}\cdot\vec{DB} = 0$

(لأن قطري المربع متعامدان)

4 $\vec{SA}\cdot\vec{AC} = \vec{HA}\cdot\vec{AC}$

لأن المسقط القائم للشعاع $\vec{SA}$ على حامل الشعاع $\vec{AC}$ هو $\vec{HA}$

$\vec{SA}\cdot\vec{AC} = -\|\vec{HA}\|\cdot\|\vec{AC}\|$

4 $= -\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)(\sqrt{2}a)$

(قطر المربع الذي طول ضلعه a يساوي $\sqrt{2}a$)

4 $\vec{SA}\cdot\vec{AC} = -a^2$

$\vec{HI}\cdot\vec{SC} = \frac{1}{2}\vec{DC}\cdot\vec{SC}$

(لأن: $\vec{HI}=\frac{1}{2}\vec{DC}$ القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه)

4 $\vec{HI}\cdot\vec{SC} = \frac{1}{2}(-\vec{CD})(-\vec{CS})$

$= \frac{1}{2}\vec{CD}\cdot\vec{CS}$

$= \frac{1}{2}a\cdot a\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

4 $= \frac{1}{2}a^2\,\frac{1}{2} = \frac{a^2}{4}$

4 $\vec{SA}\cdot\vec{SC} = \vec{SA}\cdot(\vec{SA}+\vec{AC})$

4 $= \vec{SA}\cdot\vec{SA} + \vec{SA}\cdot\vec{AC}$

4 $= a^2 - a^2 = 0$

40

١٠٢

السؤال الثالث:

$f(x) = x + 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

4 $f(x) - y_D = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

4 $= -\frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$

4 $= -2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

4 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

4 ومنه $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y_D) = 0$

فالمستقيم D الذي معادلته

$y = x+1$

هو مستقيم مقارب للخط C في جوار $+\infty$

لدراسة وضع C_f بالنسبة إلى D ندرس إشارة الفرق

4 $f(x) - y_D = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$\ln x = 0$ حيث $f(x) - y_D = 0$

4 ومنه $\boxed{x = 1}$

4 x	0	1	$+\infty$
4 $f'(x)$	+	0	−
4 $f(x)$	C يقع فوق D	نقطة مشتركة بين C و D $(1,2)$	C يقع تحت D

40

السؤال الرابع:

$Z = \left(\sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}\right)^7$

5+5 $Z = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right)^7$

5+5 $Z = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{14}\right)\right)^7$

5+5 $Z = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right)$

5 $Z = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$Z = 0 + i$

5 $\boxed{Z = i}$

40 ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

4 $f(x) = xE(x) - \frac{1}{2}E(x)(1+E(x))$

(1)

4+4 $f(x) = \begin{cases} 0 & ; 0 \le x < 1 \\ x-1 & ; 1 \le x < 2 \\ 1 & ; x = 2 \end{cases}$

4+4

4+4

(2) 4 التابع $x \mapsto 0$ مستمر على $[0,1[$

4 التابع $x \mapsto x-1$ مستمر على $[1,2[$

4 حتى يكون f مستمراً على $[0,2]$ يجب أن يكون مستمراً عند (1) و (2).

4

دراسة استمرار f عند (1)

4 $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1} (0) = 0$

4 $f(1) = 1-1 = 0$

4 $\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$

4 ومنه f مستمر عند (1)

١٣

دراسة استمرار f عند (2)

4 4 $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} (x-1) = 1 = f(2)$

4 ومنه f مستمر عند (2)

4 وبالتالي أصبح f مستمر على $[0,2]$

60

التمرين الثاني:

(1) $z^2 + pz + q = 0$

$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{p}{1} = -p$

4 $-1+i-i = -1 = -p$

4 $\boxed{p = +1}$

$z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} = \frac{q}{1} = q$

4 $(-1+i)(-i) = i+1 = 1+i = q$

$z^2 + z + 1 + i = 0$

(2)

4 $\frac{b-c}{a-c} = \frac{-1+i+i}{2+i} = \frac{-1+2i}{2+i}$

4 $= \frac{(-1+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$= \frac{-2+i+4i+2}{4+1}$

$= \frac{5i}{5} = i$

4 $\frac{b-c}{a-c} = i$

4 $\arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) = \arg(i)$

4 $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

4 فالمثلث ABC قائم في C ١٤

$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = |i|$

4 $\frac{|b-c|}{|a-c|} = 1$

$\frac{CB}{CA} = 1$

4 $BC = AC$

فالمثلث ABC متساوي الساقين

4 فأصبح المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين.

لدينا: المثلث ACB قائم في C ومتساوي الساقين

حتى يكون ACBD مربعاً

يكفي أن يكون متوازي أضلاع

(لأنه متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة وفيه ضلعان متجاوران متساويان فهو مربع)

$\vec{CA} = \vec{BD}$

4 $z_{\vec{CA}} = z_{\vec{BD}}$

4 $z_A - z_C = z_D - z_B$

$a - c = d - b$

$d = a + b - c$

$d = 2 - 1 + i + i$

4 $\boxed{d = 1 + 2i}$

60 ملاحظة: إذا أثبت الطالب الشكل الرباعي ACBD مربعاً بطريقة أخرى تصح طريقته ويعطى العلامة المناسبة.

التمرين الثالث :

$f(x) = g(\sin x)$

6+6 $f'(x) = (\sin x)' \cdot g'(\sin x)$

6 $f'(x) = \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

6 $f'(x) = \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}}$

6 $f'(x) = \cos x \cdot \frac{1}{|\cos x|}$

6 عندما $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ فإن x

تقع في الربعين الثاني والثالث

و $\cos x < 0$ في هذا المجال

6 ومنه $|\cos x| = -\cos x$

6+6+6 $f'(x) = \cos x \cdot \frac{1}{-\cos x} = -1$

60

التمرين الرابع :

$z_1 = -3 e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_2 = 2-2i$

(1) $z_1 = -3 e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3 $z_1 = -3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

3 $z_1 = -3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

3 $\boxed{z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i}$

15

$z_2 = 2-2i$

3 $z_1 \cdot z_2 = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i\right)(2-2i)$

3 $z_1 \cdot z_2 = -3 + 3i + 3\sqrt{3}\, i + 3\sqrt{3}$

3 $\boxed{z_1 \cdot z_2 = (3\sqrt{3}-3) + i(3\sqrt{3}+3)}$

(2) $z_1 = -3 e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3 $z_1 = e^{i\pi} \cdot 3 e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3 $\boxed{z_1 = 3 e^{\frac{2\pi}{3} i}}$

$z_2 = 2-2i$

3 $r = |z_2| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

3 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\theta \in$ (4)ر

3 $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $\theta = -\frac{\pi}{4}$

3 $z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

3 $z_1 \cdot z_2 = 6\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$

3 $z_1 \cdot z_2 = 6\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)}$

(3) بالمطابقة بين الشكل الجبري والأسي للعدد $z_1 z_2$ نجد

3 $6\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} = (3\sqrt{3}-3) + i(3\sqrt{3}+3)$

3 $e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}} + i\,\frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}}$

3 $e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

3 ومنه $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$

3 $\boxed{\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$

60

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

(1)
3+3 $A(0,0,0)$ ، $E(0,0,1)$
3+3 $B(1,0,0)$ ، $F(1,0,1)$
3+3 $D(0,1,0)$ ، $H(0,1,1)$
3+3 $C(1,1,0)$ ، $G(1,1,1)$
3+3 $I(0,\frac{1}{3},1)$ ، $J(1,\frac{1}{3},0)$

(2)
3 $\overrightarrow{GN}(x-1, y-1, -1)$
3 $\overrightarrow{FI}(-1, \frac{1}{3}, 0)$
3 $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI} = -x+1 + \frac{1}{3}(y-1)+0$
3 $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI} = -x+1 + \frac{y-1}{3}$
3 $\overrightarrow{FJ}(0, \frac{1}{3}, -1)$
3 $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FJ} = \frac{y-1}{3} + 1$

لاستنتاج إحداثيات النقطة N

$(GN) \perp (FIJ)$ ومنه

3+3 $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FI} = 0$ و $\overrightarrow{GN}\cdot\overrightarrow{FJ} = 0$

3+3 $-x+1+\frac{y-1}{3} = 0 \quad (1)$ و $\frac{y-1}{3}+1 = 0 \quad (2)$

من (2) نجد أن

3 $\frac{y-1}{3} = -1$ نعوض في (1)

$-x+1-1=0$

3 $\boxed{x=0}$

3 $y-1=-3 \Rightarrow \boxed{y=-2}$

3 ومنه $N(0,-2,0)$ ١٦

(3)

2 $FI = \sqrt{(-1)^2+(\frac{1}{3})^2+(0)^2}$

3 $FI = \sqrt{1+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

2 $FJ = \sqrt{(0)^2+(\frac{1}{3})^2+(-1)^2}$

3 $FJ = \frac{\sqrt{10}}{3}$

3 $FI = FJ$

فالمثلث IFJ متساوي الساقين ورأسه F.

نبحث عن $M(x,y,z)$

حتى يكون الرباعي $IFJM$ معيناً

يكفي أن يكون متوازي أضلاع لأن فيه ضلعين متجاورين متساويين.

3 $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{IM}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-\frac{1}{3} \\ z-1 \end{pmatrix}$$

3
$$\begin{cases} x=0 \\ y=\frac{2}{3} \\ z=0 \end{cases}$$

3 $M(0, \frac{2}{3}, 0)$

(AD) يمثل المحور الثاني في المعلم المتجانس

وأي نقطة منه إحداثياتها من الشكل

3 $(0,y,0)$

3 ومنه $M(0,\frac{2}{3},0)$ نقطة منه

100

المسألة الثانية :

$$f(x)=\frac{x}{\ln x}$$

① f مستمر وقابل للاشتقاق على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

4 $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

4 $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

4 $\lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$

$\boxed{x=1}$ مستقيم مقارب شاقولي

4 $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

② f قابل للاشتقاق على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

4 $f'(x)=\dfrac{1\ln x-\frac{1}{x}x}{(\ln x)^2}$

4 $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$

4 $f'(x)=0$ عندما $\ln x-1=0$

4 $\ln x=1$

4 ومنه $\boxed{x=e}$

4 $f(e)=e$

4

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4 $f(e)=e$ قيمة صغرى محلية

③ في المجال $]0,1[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً فإن 4

4 $f(]0,1[)=]-\infty,0[$

و $-1\in]-\infty,0[$

4 فالمعادلة $f(x)=-1$ لها حل وحيد α يقع في المجال $]0,1[$

4 في المجال $]1,+\infty[$ يكون f مستمراً عليه

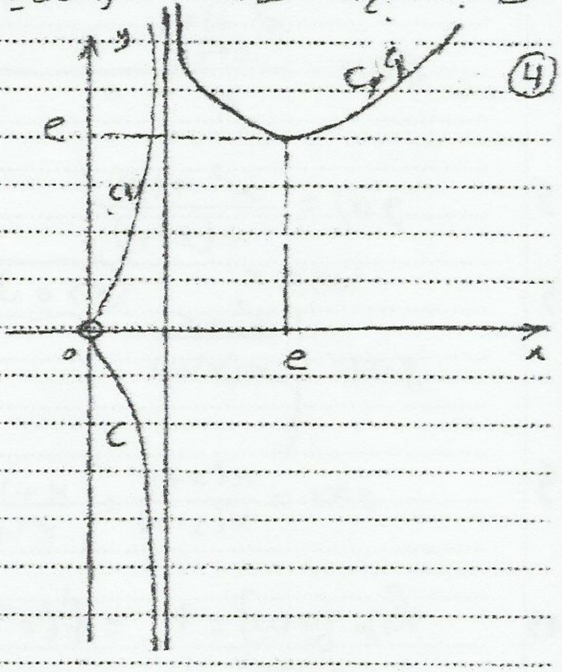
$f(]1,+\infty[)=[e,+\infty[$

4 و $-1\notin[e,+\infty[$

4 فليس للمعادلة $f(x)=-1$ أي حل في المجال $]1,+\infty[$

وبحسب ما سبق نستنتج أن للمعادلة $f(x)=-1$ حلاً وحيداً في I

④

4 + 4 

$f_1(x)=\dfrac{x}{|\ln x|}$

4 بما أن x موجب $f_1(x)=\dfrac{|x|}{|\ln x|}$

4 $f_1(x)=\left|\dfrac{x}{\ln x}\right|=|f(x)|$

ومنه C_1 ينتج عن C بالمحافظة على نقاط C التي تراتيبها موجبة وأخذ نظائر نقاط C التي تراتيبها سالبة بالنسبة إلى محور الفواصل.

الفقرة ثانياً

التمرين الثالث البديل:

ليكن التابع f المعرف على R وفق

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$$

ادرس قابلية اشتقاق التابع عند الصفر

الحل:

نصطنع تابع معدل التغير للتابع f عند الصفر

5 $$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

المعرف على R^*

$$g(x) = \frac{\frac{x^2 + |x|}{x^2 + 1} - 0}{x - 0}$$

5 $$g(x) = \frac{x^2 + |x|}{x(x^2 + 1)}$$

حالة أولى $x > 0$

5 $|x| = x$

$$g(x) = \frac{x^2 + x}{x(x^2 + 1)}$$

5 $$g(x) = \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{x+1}{x^2+1}$$

5+5 $$\lim_{x \to 0^+} [g(x)] = 1 = f'(0^+)$$

حالة ثانية $x < 0$

5 $|x| = -x$

$$g(x) = \frac{x^2 - x}{x(x^2+1)}$$

5 $$g(x) = \frac{x(x-1)}{x(x^2+1)}$$

5 $$g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$$

5 $$\lim_{x \to 0^-} [g(x)] = -1 = f'(0^-)$$

نلاحظ أن

5 $$\lim_{x \to 0^-} [g(x)] \neq \lim_{x \to 0^+} [g(x)]$$

5 فالتابع f ليس اشتقاقياً عند الصفر

60 المجموع