السؤال الأول

1) $x \in]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

3 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

3 $\lim_{x \to (-1)^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -\infty$

ومنه

3 $\boxed{x = -1}$ مستقيم مقارب شاقولي

3 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3 ومنه $\boxed{y = 0}$ مستقيم مقارب أفقي.

2) المقارب المائل D يمر بالنقطتين $(-2,0)$ و $(0,-2)$

3 $m_D = \frac{0-(-2)}{-2-0} = \frac{2}{-2} = -1$

$(y - 0) = -1(x + 2)$

3 D $\boxed{y = -x - 2}$

3 $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a = -1$

ميل المقارب المائل

3

3) $f'(1) = 0$

$f'(-3) = ?$ تعني ميل المماس للمنحني C في النقطة التي فاصلتها -3

حيث المماس يمر بالنقطتين $(-3, 0)$ و $(-1, -3)$

3 $m = \frac{0-(-3)}{-3-(-1)} = \frac{3}{-2}$

3 $f'(-3) = -\frac{3}{2}$

3 $f(2) = -2$

1+1 4) f ليس اشتقاقيا عند 0 لوجود نصف مماسين عند النقطة التي فاصلتها 0.

1+1 5) f ليس اشتقاقيا عند 2 لأن f ليس مستمرا عند 2.

40

السؤال الثاني:

1)
3 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cos\frac{\pi}{3}$

3 $= a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

3+2 $\vec{AB} \cdot \vec{CI} = 0$

(لأن المتوسط النازل من رأس في مثلث متساوي الأضلاع هو ارتفاع)

3 $\vec{IJ} \cdot \vec{DA} = -\|\vec{IJ}\|\|\vec{DA}\|$

(لأن الشعاعين $\vec{IJ}$ و $\vec{DA}$ مرتبطان خطيا وبجهتين متعاكستين)

(القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه)

3+2 $\vec{IJ} \cdot \vec{DA} = -\frac{a}{2} \cdot a = -\frac{a^2}{2}$

3 $\vec{AJ} \cdot \vec{DA} = \vec{AJ} \cdot \vec{JA}$

(لأن المسقط القائم للشعاع $\vec{DA}$ على حامل الشعاع $\vec{AJ}$ هو $\vec{JA}$)

$\vec{AJ} \cdot \vec{DA} = -\vec{AJ} \cdot \vec{AJ} =$

3 $= -\|\vec{AJ}\|^2 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$

3

3 $= -\frac{3a^2}{4}$

(ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع الذي طول ضلعه a يساوي $\frac{\sqrt{3}}{2}a$)

2)
3+3 $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot (\vec{CA} + \vec{AD})$

$= \vec{AB} \cdot \vec{CA} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

$= -\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AB} \cdot \vec{AD}$

$= -\frac{a^2}{2} + \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AD}\| \cos\frac{\pi}{3}$

3 $= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$

أي المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

40

السؤال الثالث:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) & : x>0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$$

نضع ... معدل التغير للتابع f عند الصفر وهو

4 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

المعرف على $]0,+\infty[$

4 $g(x)=\dfrac{x^2\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-0}{x}$

4 $g(x)=x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

4 $=x\left(\ln x-\ln(x+1)\right)$

4 $g(x)=x\ln x-x\ln(x+1)$

4 لما كان $\lim_{x\to 0}(x\ln x)=0$ (مبرهنة)

و $\lim_{x\to 0} x=0$

$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=0$

كان

4 + 4 $\lim_{x\to 0} g(x)=0=f'(0)$

4 ومنه f اشتقاقي عند الصفر

فالمماس للخط c في النقطة التي فاصلتها 0

أي في النقطة $(0,0)$ أفقي

4 ومعادلته : $y=0$

40

السؤال الرابع:

(1) $|iZ+2-i|=$

5 $=|iZ-2i^2-i|$

5 $=|i(Z-2i-1)|$

5 $=|i|\,|Z-1-2i|$

5 $=1\cdot|Z-1-2i| \quad =|Z-1-2i|$

(2) $|Z-1-2i|=3$

5 $|Z-(1+2i)|=3$

نعرف $Z_A=1+2i$ العدد العقدي الممثل للنقطة $A(1,2)$

5 $|Z-Z_A|=3$

5 $MA=3$

هذه المساواة تعني هندسياً

مجموعة نقاط المستوي M التي تبعد عن نقطة ثابتة A مسافة ثابتة 3

فهي تمثل مجموعة نقاط

5 دائرة مركزها $A(1,2)$

ونصف قطرها يساوي 3

40

التمرين الأول :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3+\cos x} - 2}{x^2} & ; x \neq 0 \\ m+1 & ; x = 0 \end{cases}$$

التابع : $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{3+\cos x} - 2}{x^2}$

مستمر على $\mathbb{R}^*$ ، حتى يكون f مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون مستمراً عند الصفر

أي يجب أن يتحقق الشرط :

4 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

4 $\boxed{f(0) = m+1}$

عندما $x \neq 0$ يكون :

4 $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+\cos x} - 2}{x^2}$

نضرب بالمرافق ونقسم عليه

4 $f(x) = \dfrac{3+\cos x - 4}{x^2\,(\sqrt{3+\cos x} + 2)}$

4 $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3+\cos x} + 2}$

4 $f(x) = \dfrac{-(1-\cos x)}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3+\cos x} + 2}$

4 $f(x) = \dfrac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3+\cos x} + 2}$

4 $f(x) = -2\left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{x}\right)^2 \dfrac{1}{\sqrt{3+\cos x} + 2}$

4 $f(x) = -2\left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{2\,\frac{x}{2}}\right)^2 \dfrac{1}{\sqrt{3+\cos x} + 2}$

4 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\sqrt{3+\cos x} + 2}\right) = \dfrac{1}{2+2} = \dfrac{1}{4}$

4 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2\left(\frac{1}{2}(1)\right)^2 \dfrac{1}{4}$

4 $= -2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$

4 $= -\dfrac{1}{8}$

الشرط هو :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

4 $-\dfrac{1}{8} = m+1$

$m = -\dfrac{1}{8} - 1$

4 ومنه : $\boxed{m = -\dfrac{9}{8}}$

وهي قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$.

60

التمرين الثاني:

$$w = \left(\frac{z}{|z|}\right)^2$$

(1) $x + yi = \dfrac{z^2}{|z|^2}$ 4

$x + yi = \dfrac{(x+yi)^2}{x^2+y^2}$ 4

$x + yi = \dfrac{x^2 - y^2 + 2xyi}{x^2+y^2}$ 4

$x + yi = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\, i$ 4

ومنه $x = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ 4

$y = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ 4

(2) يكون w حقيقياً إذا انعدم جزءه التخيلي أي $y = 0$ 4

ومنه $\dfrac{2xy}{x^2+y^2} = 0$

أي $xy = 0$ 4

إما $x = 0$ 4

وهو يمثل المحور yy'

أو $y = 0$ 4

وهو يمثل المحور xx'

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل اجتماع محوري الإحداثيات xx' و yy' محذوف منه النقطة $O(0,0)$ لأنه لدينا فرضاً 4

$z \neq 0$ 4

(3) $z = (1+i)^6$

4 $z = \left((1+i)^2\right)^3$

$z = (2i)^3$

4 $\boxed{z = -8i}$

$\boxed{\bar{z} = 0 - 8i}$

صورته النقطة $(0,-8)$ تنتمي إلى محور yy'

4 يكون w حقيقياً لأنها حسب الطلب السابع

طريقة (2): من الفرض $z \in$ ...

60 التمرين الثالث:

■ جدول التغيرات: $f'(x) \geq 0$ في $]-2,1[$

5 مقولة خاطئة:

5 والصواب: $f'(x) \geq 0$ مهما $x \in [-2,1]$

5 ■ للمعادلة $f(x) = 0$ حلان على المجال $]1, +\infty[$ مقولة خاطئة

5 والصواب: للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]1, +\infty[$

5 ■ $y = -2$ معادلة مقارب أفقي للخط البياني مقولة خاطئة:

5 والصواب: $\boxed{y = 0}$ مماس أفقي

5 ■ للمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد في المجال $]-2,1[$

المقولة صحيحة:

2 لأن f مستمر ومتزايد تماماً على $]-2,1[$

2 $1 \in f(]-2,1[) =]0,5[$

1 فالمعادلة $f(x) = 1$ حل وحيد في المجال $]-2,1[$

$f([1,6[) = [5,0[$

5 المسألة خاطئة :

والصواب :

5 $f([1,6[) =]0,5]$

5 $f([2,6[) =]0,5]$

المسألة خاطئة :

5 والصواب : $f([-2,6[) = [0,5]$

60

التمرين الرابع :

$P(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7$

3 (1) $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7$

3 $= -1 - 3 - 3 + 7$

$= -7 + 7 = 0$

$$\begin{array}{r|l} Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 & Z+1 \\ \mp Z^3 \mp Z^2 & Z^2 - 4Z + 7 \\ \hline -4Z^2 + 3Z + 7 & \\ \pm 4Z^2 \pm 4Z & \\ \hline 7Z + 7 & \\ \mp 7Z \mp 7 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

3 + 3

فالمعادلة $P(Z)=0$ تكتب :

3 $(Z+1)(Z^2 - 4Z + 7) = 0$

إما $Z+1=0$

3 ومنه $\boxed{Z=-1}$

أو $Z^2 - 4Z + 7 = 0$

3 $D = 16 - 4(1)(7)$

$= 16 - 28$

$= -12 < 0$

3 للمعادلة حلان في C

---

3 $\sqrt{-D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

3 إذاً: $Z_2 = \frac{-b+\sqrt{-D}\,i}{2a} = \frac{4+2\sqrt{3}i}{2}$

$\boxed{Z_2 = 2+\sqrt{3}i}$

3 أو $Z_3 = \overline{Z_2} = \boxed{2-\sqrt{3}i}$

(2)

(a

3 $AB = |Z_B - Z_A| = |2+i\sqrt{3}+1|$

$= |3+i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$

$= 2\sqrt{3}$

3 $AC = |Z_C - Z_A| = |2-i\sqrt{3}+1|$

$= |3-i\sqrt{3}| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$

$= 2\sqrt{3}$

3 $BC = |Z_C - Z_B| = |2-i\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}|$

$= |-2i\sqrt{3}| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

نلاحظ : $AB = AC = BC$

3 فالمثلث ABC متساوي الأضلاع

(b

3 $(\vec{CG}, \vec{CA}) = \arg\left(\frac{Z_A - Z_C}{Z_G - Z_C}\right)$

3 $= \arg\left(\frac{-1-2+i\sqrt{3}}{3-2+i\sqrt{3}}\right)$

$= \arg\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)$

3 $= \arg\left(\frac{(-3+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}{1+3}\right)$

$= \arg\left(\frac{-3+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+3}{4}\right)$

3 $= \arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2}$

3 فالمثلث GAC قائم في C

60

ثالثاً: حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى:

(1)

$D(0,0,0)$ ، $H(0,0,1)$ 3+3

$A(1,0,0)$ ، $E(1,0,1)$ 3+3

$C(0,1,0)$ ، $G(0,1,1)$ 3+3

$B(1,1,0)$ ، $F(1,1,1)$ 3+3

$L(0,2,0)$ ، $M(0,2,1)$ 3+3

$K(1,2,0)$ ، $J(1,2,1)$ 3+3

$I(1,\frac{1}{2},1)$ 3

(2) $\overrightarrow{BI}(0,-\frac{1}{2},1)$ 3

$\overrightarrow{AJ}(0,2,1)$ 3

$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ} = (0)+(-\frac{1}{2})(2)+(1)(1)$ 3

$= -1+1 = 0$

$\overrightarrow{GI}(1,-\frac{1}{2},0)$ 3

$\overrightarrow{HJ}(1,2,0)$ 3

$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{HJ} = (1)(1)+(-\frac{1}{2})(2)+(0)$ 3

$= 1-1 = 0$

$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}$

لأنه المسقط القائم للشعاع 2

$\overrightarrow{DJ}$ على المستوي $(AKJE)$ العمودي 3

للشعاع $\overrightarrow{AJ}$ هو $\overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}$

2 لأنه المسقط القائم للشعاع $\overrightarrow{DJ}$

3

على المستوي $(GJMH)$ العمودي

للشعاع $\overrightarrow{HJ}$ هو $\overrightarrow{GI}$

ملاحظة:

إذا أثبت الطالب

$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$

و $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$

دون استخدام المسقط تنال العلامة المخصصة للفقرة.

وجدنا أن: 3

$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$

3 و $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{DJ}=0$ 3

+

3 فالمستقيم (DJ) عمودي على كل من المستقيمين (GI) و (BI) المتقاطعين

فالمستقيم (DJ) عمودي على المستوي (BIG) 3

(3) $2\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NK}=\vec{0}$

3 $2\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NK}=\vec{0}$ 3

3 $2\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{AK}=\vec{0}$ 3

3 $2\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AK}$

$2\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DC}$

3 ومنه $\boxed{N=C}$ 3

أي النقطة N منطبقة على C

3 (4) $DJ=\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}$

3 $DJ=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$ 2

3 نصف قطر الكرة $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 3

مركز الكرة منتصف $[DJ]$

3 $(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

معادلة الكرة هي:

3 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2+(z-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$

100

8

المسألة الثانية :

$f(x) = ax + \frac{b}{\ln x}$

أولاً : $(e,0) \in C_f$

5 ومنه $f(e) = 0$

$ae + \frac{b}{\ln e} = 0$

5 $ae + b = 0$ (1)

المماس للخط C_f في النقطة التي فاصلتها e يوازي المستقيم $y = 2x$ ومنه

5 $f'(e) = 2$

$f'(x) = a + \frac{0 - \frac{1}{x} b}{(\ln x)^2}$

5 $f'(x) = a - \frac{b}{x(\ln x)^2}$

$f'(e) = 2$

$a - \frac{b}{e(1)} = 2$

5 $ae - b = 2e$ (2)

بجمع (1) و (2) نجد: $2ea = 2e$

$a = \frac{2e}{2e} = 1$

5 $\boxed{a = 1}$

نعوض في (1)

$e + b = 0$

5 ومنه $\boxed{b = -e}$

فتكون عبارة الدالة هي:

$f(x) = x - \frac{e}{\ln x}$

ثانياً : $f(x) = x - \frac{e}{\ln x}$

5 (1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

5 $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$

5 $x = 1$ مستقيم مقارب شاقولي

(2) f قابل للاشتقاق على $]1,+\infty[$

$f'(x) = 1 - \frac{-e}{x(\ln x)^2}$

5 $f'(x) = 1 + \frac{e}{x(\ln x)^2} > 0$

ومنه f متزايدة تماماً على $]1,+\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

5 5

(3) إثبات أن $D: y = x$ مقارب للخط C_f

5 $f(x) - y_D = \frac{-e}{\ln x}$

5 $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = 0$

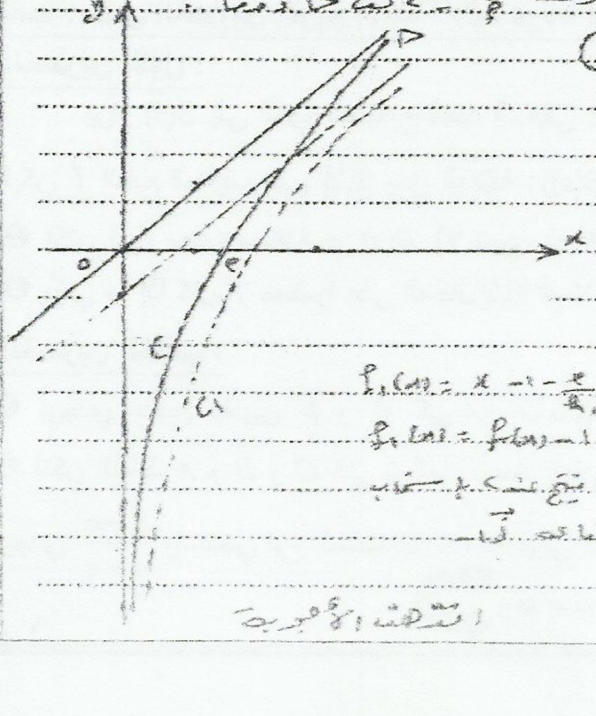
5 ومنه $D: y = x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

لدراسة وضع C_f بالنسبة إلى D ندرس

5 إشارة الفرق: $f(x) - y_D = -\frac{e}{\ln x} < 0$

5 ومنه C_f يقع تحت D دوماً

(4)



5

$f_1(x) = x - 1 - \frac{e}{\ln x}$

$f_1(x) = f(x) - 1$

C_1 ينتج عن C بانسحاب شعاعه $-\vec{j}$

انتهت الأجوبة

100