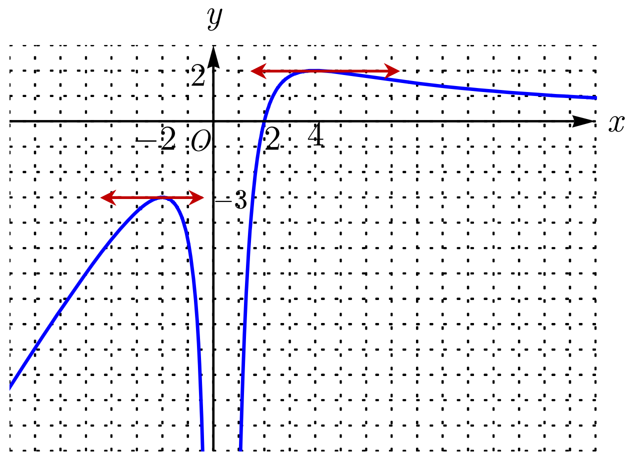
أولاً : **أجيبي عن الأسئلة الستة الآتية**: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : في الشكل المجاور : الخط البياني C_f الممثل لتابع f المعرّف على $I=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.



❶ أوجدي $\lim_{x\to0} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

❷ عيّني: a) $f(4)$ و $f(2)$. b) $f'(-2)$ و $f'(4)$

❸ ماعدد حلول كل من المعادلات الآتية ؟

a) $f(x)=4$. b) $f(x)=-4$

❹ حلّي المتراجحة الآتية : $f(x)>0$.

❺ نظّمي جدولاً بتغيرات التابع f .

الحل

❶ $\lim_{x\to0} f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و 3×3

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

❷ a) $f(2)=0$ و $f(4)=2$. 3×2

b) $f'(-2)=0$ و $f'(4)=0$ (لأنّ المماس أفقياً في النقطتين اللتين فاصلتاهما $x=-2$ و $x=4$) 3×2

❸ a) لا يوجد أي حل للمعادلة $f(x)=4$ 3×2

b) للمعادلة $f(x)=-4$ ثلاثة حلول .

❹ مجموعة حلول المتراجحة $f(x)>0$ هي $x\in]2,+\infty[$

❺

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

3
3
3
40

السؤال الثاني:

❶ حلّي المتراجحة الآتية :

$\ln(5-x)(x-1)\ge\ln3$.

❷ حلّي المعادلة الآتية :

$\ln(2x-3)+2\ln(x-2)=\ln((2x-3)(8-x))$

❸ حلّي المتراجحة الآتية :

$2\ln^2 x-3\ln x+1\le 0$.

الحل

❶ $\ln(5-x)(x-1)\ge\ln3$

❑ شرط الحل : $3>0$ وهذا محقق دوماً

$x\in]-\infty,+\infty[$

$D_1=]-\infty,+\infty[$ 3

❑ $(5-x)(x-1)\ge3$ ومنه

$-x^2+6x-8\ge0$

وبالتالي $x^2-6x+8\le0$ ومنه 4

$(x-4)(x-2)\le0$ وهذا محقق عندما

$x\in[2,4]$ ومنه $D_2=[2,4]$.

❑ فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي : 3

$x\in D_1\cap D_2=[2,4]$ ومنه $S=[2,4]$

❷

$\ln(2x-3)+2\ln(x-2)=\ln((2x-3)(8-x))$

❑ نوجد مجموعة تعريف المعادلة :

$(2x-3)(8-x)>0$ و $x-2>0$ و $2x-3>0$

$x\in]\frac{3}{2},8[$ و $x\in]2,+\infty[$ و $x\in]\frac{3}{2},+\infty[$

ومنه $x\in]\frac{3}{2},8[\cap]2,+\infty[\cap]\frac{3}{2},+\infty[$ وبالتالي

$x\in]2,8[$ ومنه $D_1=]2,8[$ 3

❐ نطبق خواص اللوغاريتم :

$$\ln((2x-3)\cdot(x-2)^2) = \ln((2x-3)(8-x))$$

ومنه $(2x-3)\cdot(x-2)^2 = (2x-3)(8-x)$ 3

$(2x-3)\cdot(x-2)^2 - (2x-3)(8-x) = 0$ 3

$(2x-3)(x^2-4x+4-8+x) = 0$

$(2x-3)(x^2-3x-4) = 0$

$(2x-3)(x-4)(x+1) = 0$ 3

إما $2x-3=0$ ومنه $x = \dfrac{3}{2} \notin D_1$ مرفوض

أو $x-4=0$ ومنه $x = 4 \in D_1$ مقبول . 3

أو $x+1=0$ ومنه $x = -1 \notin D_1$ مرفوض . 3

$S = \{4\}$

❸ $2\ln^2 x - 3\ln x + 1 \le 0$

المتراجحة معرّفة على $]0,+\infty[$

$2\ln^2 x - 3\ln x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ ومنه $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 1 > 0$

$\ln x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3+1}{4} = 1$ 3

ومنه $\boxed{x = e}$

أو $\ln x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ 3

ومنه $\boxed{x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}}$

x	0		$\sqrt{e}$		e		$+\infty$
$2\ln^2 x - 3\ln x + 1$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة	||	غير محققة		محققة		غير محققة	

3

فمجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي $x \in [\sqrt{e}, e]$ 3

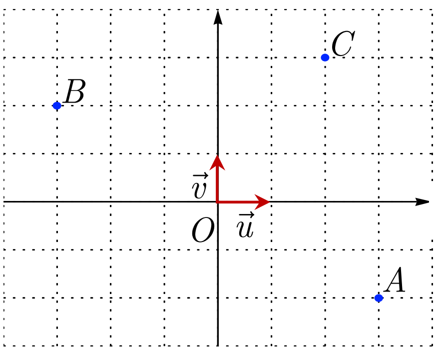
40

السؤال الثالث : في المستوي العقدي المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

❶ اكتبي الأعداد العقدية z_A و z_B و z_C الممثلة للنقاط A و B و C بالترتيب .

❷ احسبي $|z_A|$ و $|z_B|$ و $|z_C|$.
ثمّ استنتجي أن النقطة O هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC .

❸ احسبي $|z_A \cdot z_B|$ و $\left|\dfrac{z_A}{z_B}\right|$ و $|z_A{}^3|$.



الحل

4 × 3 ❶ $z_A = 3-2i$ و $z_B = -3+2i$ و $z_B = 2+3i$

❷ $|z_A| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$

4 × 3 $|z_B| = \sqrt{(-3)^2+(2)^2} = \sqrt{13}$

$|z_C| = \sqrt{(2)^2+(3)^2} = \sqrt{13}$

بما أنّ $|z_A| = |z_B| = |z_C|$ فإنّ $OA = OB = OC$

7 ومنه O مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC .

3 × 3 ❸ $|z_A \cdot z_B| = |z_A|\cdot|z_B| = \sqrt{13}\cdot\sqrt{13} = 13$

$$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 1$$

$$|z_A{}^3| = |z_A|^3 = 13\sqrt{13}$$

40

السؤال الرابع : ليكن f تابعاً معرّفاً على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل x من $\mathbb{R}$ تتحقّق المتراجحة الآتية : $1 \le f(x) \le 2$

ولنعرّف التابع g على المجال $]-\infty,0[$ وفق العلاقة : $g(x) = \frac{2f(x)+1}{x}$.

❶ أثبتي أنّه أياً تكن $x \in]-\infty,0[$ كان $\frac{5}{x} \le g(x) \le \frac{3}{x}$.

❷ أوجدي نهاية التابع g عند $-\infty$ و عند الصفر .

الحل

❶ $1 \le f(x) \le 2$ ومنه $2 \le 2f(x) \le 4$ وبالتالي

$3 \le 2f(x)+1 \le 5$ وبما أنّ $x \in]-\infty,0[$ فإذا قسمنا — 8

المتراجحة على x سوف تتغير جهة التراجح

$\frac{3}{x} \ge \frac{2f(x)+1}{x} \ge \frac{5}{x}$ ومنه $\frac{3}{x} \ge g(x) \ge \frac{5}{x}$ — 8

أي $\frac{5}{x} \le g(x) \le \frac{3}{x}$

❷ عند $-\infty$

بما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$ — 8

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$. — 8

عند الصفر :

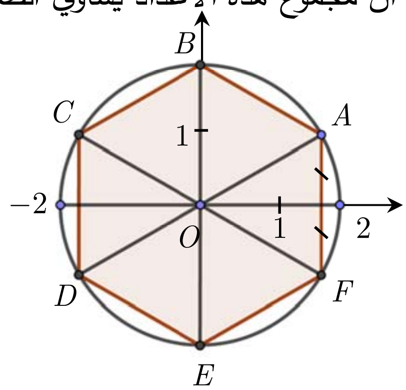
لدينا $g(x) \le \frac{3}{x}$ بما أنّ $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{3}{x} = -\infty$ — 8

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (3) نجد $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -\infty$

40

السؤال الخامس: $ABCDEF$ مسدس منتظم مرسوم في الشكل المجاور : اكتبي الأعداد العقدية المقابلة لرؤوس هذا المضلع المنتظم بالشكل المثلثي .

ثمّ أثبتي أنّ مجموع هذه الأعداد يساوي الصفر .



الحل

$z_A = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i$ و — 5

$z_B = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i$ — 5

$z_C = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i$ و — 5

$z_D = 2(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) = -\sqrt{3} - i$ — 5

$z_E = \overline{z}_B = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})) = -2i$ و — 5

$z_F = \overline{z}_A = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})) = \sqrt{3} - i$ — 5

$z_A + z_B + z_C + z_D + z_E + z_F =$

$\sqrt{3} + i + 2i - \sqrt{3} + i - \sqrt{3} - i - 2i + \sqrt{3} - i = 0$ — 10

40

السؤال السادس : ليكن العددان العقديان :

$z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $z_1 = -1 + i$

❶ اكتبي كلاً من z_1 و z_2 و $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل المثلثي.

❷ اكتبي $\frac{z_1}{z_2}$ بالشكل الجبري.

❸ استنتجي $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

الحل

❶ $z_1 = -1 + i$ — 4

$r = |z_1| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$ — 4

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

ومنه $z_1 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$. — 4

$z_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$r = |z_2| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$ — 4

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$ 4

ومنه $z_2 = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{1}(\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12}))$$ 4

❷ $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-1+i}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(-1+i)(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

ومنه $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4

وبالتالي $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

❸ بالمقارنة بين الشكل المثلثي والشكل الجبري نجد

$$\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ 4

ومنه : $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ 4

$$\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$ 4

40

ثانياً : **حلي التمارين الأربعة الآتية** :

التمرين الأول : ادرسي نهايات كلاً من التوابع الآتية عند a الموافقة .

❶ $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$ عند $-\infty$.

❷ $f(x) = x - \cos^2 x$ عند $-\infty$.

❸ $f(x) = \frac{x^3 - 8}{2 - \sqrt{x+2}}$ عند 2 .

❹ $f(x) = \frac{2x^3 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ و -1 و 1

الحل

❶ $f(x) = x + 2\sqrt{1-x}$

نلاحظ أنّ نهاية التابع f عند $-\infty$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty + -\infty$ لإزالتها نكتب 3

ومنه $f(x) = x + \sqrt{x^2(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})}$ 3

$$f(x) = x + \sqrt{x^2}\sqrt{(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})}$$

بما أنّ x في جوار $-\infty$ فإنّ $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ 3

ومنه $f(x) = x - x\sqrt{(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})}$ 3

$$f(x) = x(1 - \sqrt{(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})})$$ 3

وبما أنّ $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x^2}) = 0$ و $\lim_{x\to-\infty}(\frac{-1}{x}) = 0$ فإنّ 3

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. 3

❷ $f(x) = x - \cos^2 x$ عند $-\infty$.

$0 \le \cos^2 x \le 1$ ومنه $0 \ge -\cos^2 x \ge -1$ 3

وبالتالي $x \ge x - \cos^2 x \ge -1 + x$ 3

$$x \ge f(x) \ge -1 + x$$

لدينا $f(x) \le x$ 3

بما أنّ $\lim_{x\to-\infty}(x) = -\infty$ فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (3) نجد أنّ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

❸ $f(x) = \frac{x^3 - 8}{2 - \sqrt{x+2}}$

نلاحظ أنّ نهاية التابع f عند 2 هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها نكتب : 3

ومنه $f(x) = \frac{(x^3 - 8)(2 + \sqrt{x+2})}{(2 - \sqrt{x+2})(2 + \sqrt{x+2})}$ 3

ومنه $f(x) = \frac{(x^3 - 8)(2 + \sqrt{x+2})}{(4 - (x+2))}$ 3

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(2 + \sqrt{x+2})}{(-x+2)}$$

وبالتالي :

$$f(x)=\frac{-(-x+2)(x^2+2x+4)(2+\sqrt{x+2})}{(-x+2)}$$ 3

ومنه $f(x)=-(x^2+2x+4)(2+\sqrt{x+2})$

وبالتالي $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-(12)(4)=-48$.

❹ $f(x)=\dfrac{2x^3-5x+3}{x^2-1}$ عند $-\infty$ و $+\infty$ و -1 و 1 3

f معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ أي

$x\in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

عند $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-5x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

عند $+\infty$: 3

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-5x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}2x=+\infty$$

عند -1 :

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$. 3

عند 1 : نلاحظ أنّ نهاية التابع f عند 1 هي حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{0}{0}$ لإزالتها نكتب :

بفرض $p(x)=2x^3-5x+3$

نلاحظ أنّ $p(1)=0$ ومنه كثير حدود 3

$p(x)=2x^3-5x+3$ يقبل القسمة على $(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-5x+3 & x-1 \\ \hline \mp 2x^3 \pm 2x^2 & 2x^2+2x-3 \\ \hline 2x^2-5x+3 & \\ \mp 2x^2 \pm 2x & \\ \hline -3x+3 & \\ \pm 3x \mp 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$ 3

ومنه $p(x)=(x-1)(2x^2+2x-3)$ وبالتالي

$$f(x)=\frac{(x-1)(2x^2+2x-3)}{(x-1)(x+1)}=\frac{2x^2+2x-3}{x+1}$$

ومنه $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{1}{2}$. 3

60

التمرين الثاني : ❶ ليكن العدد العقدي $z=\dfrac{3+7i}{2-5i}$ احسبي z^5 بالشكل الجبري .

❷ ليكن العدد العقدي $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(1-i)^4}$

اكتبي z بالشكل الجبري .

❸عيّني مجموعة النقاط M التي يحقّق العدد العقدي z الذي يمثّلها المساواة : $\arg(iz)=\dfrac{5\pi}{4}$.

الحل

❶ $z=\dfrac{3+7i}{2-5i}$ ومنه $z^5=\left(\dfrac{3+7i}{2-5i}\right)^5$

ومنه 4

$$z^5=\left(\frac{(3+7i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}\right)^5=\left(\frac{6-35+15i+14i}{4+25}\right)^5$$

وبالتالي:

$$z^5=\left(\frac{-29+29i}{29}\right)^5$$ 4

$$=(-1+i)^5=(-1+i)^4(-1+i)$$ 2

$z^5=(2i)^2(-1+i)=-4(-1+i)=4-4i$.

❷ لدينا $z=\dfrac{(\sqrt{3}+i)^8}{(1-i)^4}$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$ 4

$$(\sqrt{3}+i)^8=2^8\left(\cos\frac{8\pi}{6}+i\sin\frac{8\pi}{6}\right)$$ 4

$$(\sqrt{3}+i)^8=2^8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$(1-i)^4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$$ 4

$$z=2^6\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\pi\right)\right)$$ 4

ومنه $z=64\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ 2

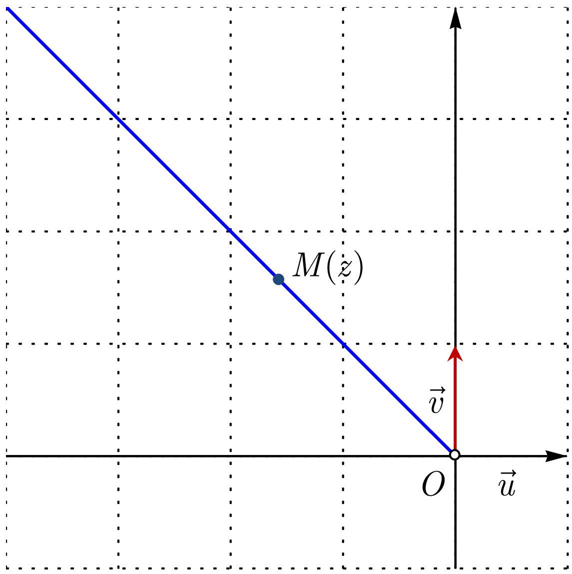
وبالتالي $z=64\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=32+i32\sqrt{3}$. 2

❸ $\arg(iz)=\frac{5\pi}{4}$

$\arg(i)+\arg(z)=\frac{5\pi}{4}$ 4

ومنه $\frac{\pi}{2}+\arg(z)=\frac{5\pi}{4}$ وبالتالي

$\arg(z)=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$ 4



$\frac{2}{40}$

فمجموعة النقاط $M(z)$ هي مجموعة نقاط نصف المستقيم المرسوم في الشكل المجاور

معادلته من الشكل : $y=-x$ حيث $x<0$.

التمرين الثالث : $ABCDEFGH$ مكعب . I منتصف $[EF]$ و J منتصف $[FG]$

❶ بيّني إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب . وعللي إجابتك .

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$ b) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB})$

❷ عبّري عن المجموع الشعاعي المفروض بشعاع واحد (قد يكون مضروباً بعدد)

وذلك باستخدام نقطتين من الشكل حصراً : $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$

❸ وضّعي النقطة P حيث

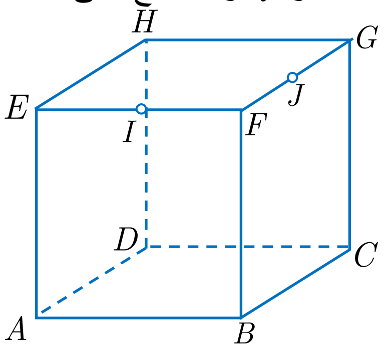
$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. 4

❹ باختيار المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$:

a) عيّني إحداثيات كلاً من رؤوس المكعب

و L و N و R مراكز الأوجه $ABCD$ و $ADHE$ و $DCGH$ بالترتيب و Q منتصف $[LN]$.

b) أثبتي أنّ النقاط A و Q و R تقع على استقامةٍ واحدة .



الحل

❶ a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$

كلّا، لا تقع : لنفرض نقطة K خارج المكعب بحيث

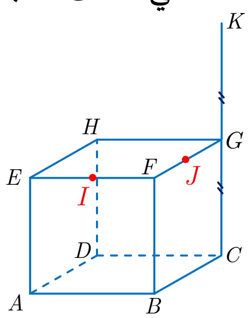
4 $\overrightarrow{CK}=2\overrightarrow{CG}$ عندئذٍ استناداً إلى علاقة شال

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{BF}$ وبما أنّ الشكل $FBCG$

4 مربع فإنّ $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BF}$ ومنه

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{AK}$

4 و منه $\boxed{M=K}$ لاحظي الشكل المجاور



4 b) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{HB})$

باستخدام علاقة شال نجد:

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CB})$

وبالاستفادة من أنّ جمع شعاعين متعاكسين يساوي

الشعاع الصفري نجد $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG})$ ومن

تساوي الشعاعين $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$ نجد

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$. ومنه $\boxed{M = B}$.

❷ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI}$

❸ $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

بما أنّ كل وجه من أوجه المكعب هو مربع فإنّ

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ و $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ ومنه

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DO}$

حيث O مركز المربع $HEAD$ و منه :

$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{CO}$. ومنه P تنطبق على O.

❹ باختيار المعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$:

a) $A(0,0,0)$ ، $E(0,0,1)$

$B(1,0,0)$ ، $F(1,0,1)$

$D(0,1,0)$ ، $H(0,1,1)$

$C(1,1,0)$ ، $G(1,1,1)$

$L(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ ، $N(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ، $Q(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ، $R(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

b) $\overrightarrow{AQ}(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ و $\overrightarrow{AR}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

نلاحظ أنّ $\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{AQ}$ فالشعاعان $\overrightarrow{AR}$ و $\overrightarrow{AQ}$ مرتبطان خطياً فالنقاط A و Q و R تقع على استقامةٍ واحدة .

4
4
4
4
4
4
4
4
4
4

60

التمرين الرابع:

❶ أثبتي أياً تكن $x \geq 0$ صحة المساواة الآتية :

$\ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

❷ عيّني مجموعة تعريف كلاً من التابعين الآتيين :

$f(x) = \ln(x-2) - \ln\left|x+1\right|$ و $g(x) = \dfrac{2\ln x + 5}{\ln x - 1}$

❸ f تابعٌ يحقّق المتراجحة : $\left|f(x)\right| \leq \sqrt{x^2+1} + x$ أياً تكن $x \in \mathbb{R}$. ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

الحل

❶

$$L_1 = \ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$

$$= \ln\left(\frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}\right)$$

$$= -\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = L_2$$

❷ $f(x) = \ln(x-2) - \ln\left|x+1\right|$

f معرّف عندما $0 < \left|x+1\right|$ و $(x-2) > 0$

وهذا محقّق عندما $x \neq -1$ و $x > 2$

أي $x \in]2,+\infty[$

$$g(x) = \frac{2\ln x + 5}{\ln x - 1}$$

g معرّف عندما $x > 0$ و $\ln x - 1 \neq 0$

أي $x > 0$ و $\ln x \neq 1$ ومنه $x > 0$ و $x \neq e$

وبالتالي $x \in]0,+\infty[\setminus \{e\}$

أي : $x \in]0,e[\cup]e,+\infty[$

❸ $\left|f(x)\right| \leq \sqrt{x^2+1} + x$

$\left|f(x) - 0\right| \leq g(x)$

حيث $g(x) = \sqrt{x^2+1} + x$

نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$ لإزالتها نكتب

$$g(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)\cdot(\sqrt{x^2+1} - x)}{(\sqrt{x^2+1} - x)}$$

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (2) نجد

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

5
5
5
5
5
5
5
5
5
5

50

ثالثاً: **حلي المسألتين الآتيتين** :

المسألة الأولى: في مستوٍ محدث بمعلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط : $A(3,0,1)$ و $B(0,-1,2)$ و $C(1,-1,0)$

❶ أثبتي أنّ النقاط A و B و C لا تقع على استقامةٍ واحدة . ما نوع المثلث ABC ؟ واحسبي مساحته.

❷ أوجدي إحداثيات النقطة D حتى يكون الرباعي $ACBD$ مستطيلاً .

❸ لتكن النقطة $M(-3,9,-2)$. أوجدي إحداثيات النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة إلى C .

❹ هل النقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[MN]$ ؟ عللي إجابتك .

الحل

❶ $\overrightarrow{AB}(-3,-1,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2,-1,-1)$ نلاحظ أنّ 5

الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأنّ مركباتهما غير متناسبة ($\frac{-3}{-2} \neq \frac{-1}{-1}$) فالنقاط A و B و C لا تقع على استقامةٍ واحدة . 5

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(1)^2} = \sqrt{11}$$

$$AC = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6}$$ 5

$$BC = \sqrt{(1-0)^2+(-1+1)^2+(0-2)^2} = \sqrt{5}$$ 5

نلاحظ أنّ $BC^2 + AC^2 = AB^2$ لأنّ 5

$(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{6}) = (\sqrt{11})^2$

$5 + 6 = 11$ محقّق

وبالتالي حسب عكس فيثاغورس نجد أنّ المثلث ABC قائم في C . 5

$$S(ABC) = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{5} = \frac{1}{2}\sqrt{30}$$ 5

❷ حتى يكون الرباعي $ACBD$ مستطيلاً يكفي أن يكون $ACBD$ متوازي أضلاع لأنّ المثلث ABC قائم في C لأنّه يصبح متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل .

أي يجب أن يتحقّق : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$

$(-2,-1,-1) = (0-x_D, -1-y_D, 2-z_D)$ 5

ومنه $-2 = -x_D$ وبالتالي $2 = x_D$ 5

$-1 - y_D = -1$ ومنه $y_D = 0$

$2 - z_D = -1$ و $z_D = 3$ 5

ومنه : $D(2,0,3)$

❸ $N(2x_C - x_M, 2y_C - y_M, 2z_C - z_M)$ 5

$N(2+3, -2-9, 0+2)$

ومنه $N(2+3, -2-9, 0+2)$

$N(5,-11,2)$ 5

❹

$$BM = \sqrt{(0+3)^2+(-1-9)^2+(2+2)^2} = \sqrt{125}$$ 5

$$BN = \sqrt{(5-0)^2+(-11+1)^2+(2-2)^2} = \sqrt{125}$$ 5

ومنه $BM = BN$

فالنقطة B تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[NM]$. 5

80

المسألة الثانية: ليكن f التابع المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$

❶ أثبتي أنّ f اشتقاقي على I، واحسبي تابعه المشتق $f'(x)$.

❷ نظّمي جدولاً يبيّن جهة اطراد f .

❸ استنتجي من الجدول السابق مجموعة حلول المتراجحة : $2x^2 + 1 > \ln x$.

❹ اكتبي معادلةً للمماس d للخط البياني للتابع f في نقطة منه $x = 1$.

الحل

❶ التابع $x \mapsto 2x^2 + 1$ كثير حدود اشتقاقي على $\mathbb{R}$

فهو اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$ 5

التابع $x \mapsto -\ln x$ اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$ حسب 5

تعريف التابع اللوغاريتمي .

فالتابع f اشتقاقي على $I =]0,+\infty[$ لأنّه عبارة عن 5

مجموع تابعين اشتقاقين على $I =]0,+\infty[$.

$f'(x) = 4x - \dfrac{1}{x}$ ومنه $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x}$ 5

❷ $f'(x) = 0$ عندما $4x^2 - 1 = 0$ 5

وبالتالي $x^2 = \dfrac{1}{4}$ ومنه $x = \dfrac{1}{2}$ أو $x = -\dfrac{1}{2}$ مرفوض 5

$f(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{4}) + 1 - \ln\frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \ln 2$. 5

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$\frac{3}{2} + \ln 2$	$\nearrow$	

5

5

❸ $2x^2 + 1 > \ln x$

وهذا يكافئ $2x^2 + 1 - \ln x > 0$ 5

أي $f(x) > 0$ نلاحظ من جدول اطراد التابع f أنّ 5

$f(x) \geq \dfrac{3}{2} + \ln 2 > 0$ أياً تكن $x \in]0,+\infty[$

وهي مجموعة حلول المتراجحة المفروضة.

❹ $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(1) = 3$ و $f'(1) = 3$ 5

$y = 3(x-1) + 3$ 5

$\boxed{y = 3x}$ 5

70

انتهت الأجوبة