أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

3 (1) f معرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

2 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

3+3 $\lim_{x\to 1^{+}} f(x)=+\infty \Rightarrow$ مستقيم مقارب $\boxed{x=1}$ شاقولي للخط c

3 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3 (2) قيمة كبرى محلياً $f(-2)=-2$

3 قيمة صغرى محلياً $f(2)=4$

5 (3) $f(D)=]-\infty,-2]\cup[4,+\infty[$

بما أن $0\notin f(D)$

5 فليس للمعادلة $f(x)=0$ حلول

ومنه الخط c لا يقطع محور الفواصل

5 (4) $f(x)<0$ عندما $x\in]-\infty,-2]$

$f'(x)<0$ عندما

5 $x\in]-2,-1[\cup]1,2[$

40

السؤال الثاني:

3 (1) $\vec{n}_P(1,2,-1)$

3 $\vec{n}_Q(2,1,-1)$

3 نلاحظ أن الشعاعين $\vec{n}_Q$ و $\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}$

3 فالمستويان P و Q متقاطعان

3 $\begin{cases} 2x-z=-y-2 \\ x-z=-2y-1 \end{cases}$

بفرض $y=t$

3 $\begin{cases} 2x-z=-t-2 \\ x-z=-2t-1 \end{cases}$

3 بالطرح: $\boxed{x=t-1}$

3 نعوض $t-1-z=-2t-1$

$-z=-3t$

3 $\boxed{z=3t}$

3 $(d):\begin{cases} x=t-1 \\ y=t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=3t \end{cases}$

5 (2) $\vec{n}_R=\vec{u}_d(1,1,3)$

$A(2,1,-1)$

$1(x-2)+1(y-1)+3(z+1)=0$

5 $\boxed{x+y+3z=0}$

40 المجموع

السؤال الثالث:

$2e^{2x}-5e^{x}+3>0$

$2e^{2x}-5e^{x}+3=0$

5 $\Delta=25-4(2)(3)$

$=25-24=1$

5 $e^{x}=\frac{5+1}{4}=\frac{3}{2}$

5 $x=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^{3}}$

5 أو $e^{x}=\frac{5-1}{4}=1$

5 $\boxed{x=0}$

x	$-\infty$		0		$\sqrt{e^3}$		$+\infty$
5 $2e^{2x}-5e^{x}+3$		+	0	−	0	+	
5 المتراجحة		م		ـــ		م	

5 $x\in]-\infty,0[\cup]\sqrt{e^{3}},+\infty[$

40 المجموع

السؤال الرابع:

8 $z_A=1 \quad z_B=2 \quad z_C=3+i$

4+4 $\alpha=(\vec{OA},\vec{OC})=\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)=\arg\left(\frac{3+i}{1}\right)$

4+4 $\beta=(\vec{AB},\vec{AC})=\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(\frac{2+i}{1}\right)$

4+4 $\alpha+\beta=\arg\left(\frac{3+i}{1}\times\frac{2+i}{1}\right)=\arg\left(\frac{5(1+i)}{1}\right)=$

4+4 $\alpha+\beta=\arg\left(5\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

40 المجموع

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$f(x)=\tan x$

10 $f(\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1$

10 $f'(x)=1+\tan^2 x$

10 $f'(\frac{\pi}{4})=1+1^2=2$

10 بما أن f اشتقاقية عند $x=\frac{\pi}{4}$:

10 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}}=f'(\frac{\pi}{4})$

10 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=2$

60

التمرين الثاني:

$\boxed{1}$ طالب واحد و 2 طالبة

5x3 $\binom{8}{2}\cdot\binom{4}{1}$

5 + 5 $28\times 4=112$

$\boxed{2}$ (3 طالبات) أو (طالبين وطالبة) أو (طالبة وطالبتان)

5x5 $\binom{4}{2}\cdot\binom{8}{1}+\binom{4}{1}\cdot\binom{8}{2}+\binom{4}{3}$

5 $48+112+4=$

5 $=164$

60

التمرين الثالث:

① $u_n=\frac{n^2}{n!}$

4 $u_{n+1}-u_n=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}-\frac{n^2}{n!}$

4 $=\frac{(n+1)^2}{(n+1)\,n!}-\frac{n^2}{n!}$

4 $=\frac{n+1-n^2}{n!}=\frac{-n^2+n+1}{n!}$

4 نلاحظ أن إشارة $u_{n+1}-u_n$ من إشارة البسط لذلك:

4 ندرس إشارة المقدار $-x^2+x+1$

فنجد منه $-x^2+x+1=0$

$x^2-x-1=0$

4 $\Delta=1-4(1)(-1)=5$

$\sqrt{\Delta}=\sqrt{5}$

4 إما $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4 أو $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	2	$+\infty$
4 $-x^2+x+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

نلاحظ أنه في ما $n\geq 2$ يكون

4 $-n^2+n+1<0$ ومنه $u_{n+1}-u_n<0$ متناقصة

4 فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً بدءاً من الحد ذي الدليل $n_0=2$

4 ② $\underbrace{1+2+\dots+n}=\frac{n}{2}(1+n)$

4 مجموع n حداً من متتالية حسابية أساسها 1

4 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2+\dots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n(1+n)}{2n^2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n}{2n^2}\right)$

4 $=\frac{1}{2}$

60 • ملاحظة: إذا اتبع الطالب طريقة أخرى في دراسة اطراد المتتالية u_n يُعطى العلامات المخصصة لهذا السؤال

التمرين الرابع :

5 $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

2 $2i\sin x = e^{ix}-e^{-ix}$

2 $\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3$

5×3 $= \frac{1}{-8i}\left[e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}\right]$

3×2 $= \frac{-1}{8i}\left[e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right]$

3×2 $= \frac{-1}{8i}\left[(e^{i3x}-e^{-3ix}) - 3(e^{ix}-e^{-ix})\right]$

3×2 $= \frac{-1}{8i}\left[2i\sin 3x - 3(2i\sin x)\right]$

3×2 $= \frac{-1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

ومنه $-4\sin^3(x) = \sin 3x - 3\sin x$

5 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x - 3\sin x}{\tan^3 x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-4\sin^3 x}{\tan^3 x}\right)$

5+2 $= \lim_{x\to 0}\left[-4\cos^3(x)\right] = -4(1)^3 = -4$

60 ثانياً : حل المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى :

3

3 ① a) $D(0,1,0)$

3 $I(\frac{1}{2},0,0)$

3 $F(1,0,1)$

$J(\frac{1}{2},1,1)$

3 $\vec{DI}(\frac{1}{2},-1,0)$

3 $\vec{JF}(\frac{1}{2},-1,0)$

3 بما أن $\vec{DI}=\vec{JF}$ فإن DIFJ تشكل متوازي أضلاع

3 $\vec{IJ}(0,1,1)$

3 $\vec{DF}(1,-1,1)$

3 $\vec{IJ}\cdot\vec{DF} = (0)(1)+(1)(-1)+(1)(1)=0$

3 ومنه $(DF)\perp(IJ)$

3 ومنه قطرا DIFJ متعامدان ومتناصفان

3 $IJ = \|\vec{IJ}\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

3 $DF = \|\vec{DF}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

3 مساحة المعين: $S = \frac{1}{2}\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

b) $\vec{n}(2,1,-1)$

3 $\vec{n}\cdot\vec{DI} = (2)(\frac{1}{2})+(1)(-1)+(-1)(0)$
$= 1-1+0=0$

3 ومنه $\vec{DI}\perp\vec{n}$ ... ①

3 $\vec{n}\cdot\vec{IJ} = (2)(0)+(1)(1)+(-1)(1)$
$= 0+1-1=0$

3 ومنه $\vec{IJ}\perp\vec{n}$

3 ومنه $\vec{n}$ ناظم على المستوي (DIJ)

$2(x-0)+1(y-1)-1(z+0)=0$

3 معادلة المستوي (DIJ): $\boxed{2x+y-z-1=0}$

3 c) $E(0,0,1)$

$dist(E,(DIJ))$

4 $= \frac{|0+0-1-1|}{\sqrt{4+1+1}}$

3 $= \frac{2}{\sqrt{6}} = h$

3 $V = \frac{1}{3}S\cdot h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$

② a) $D: \begin{cases} E(0,0,1) \\ \vec{u}_D = \vec{n} = (2,1,-1) \end{cases}$

3 $D: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t+1 \end{cases} : t\in\mathbb{R}$

$K(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

3 $\begin{cases} 1 = 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = t \\ \frac{1}{2} = -t+1 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \end{cases}$

3 ومنه $K(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ تنتمي إلى المستقيم Δ

(الموافقة لـ $t = \frac{1}{2}$)

b) بتعويض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي فنجد

3 $2(2t) + t - (-t+1) - 1 = 0$

$4t + t + t - 1 - 1 = 0$

3 $6t = 2 \Rightarrow \boxed{t = \frac{1}{3}}$

3 ومنه $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} \end{cases}$

$L(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

c) لنوجد مركز ثقل المثلث BEG

$\begin{cases} B(1,0,0) \\ E(0,0,1) \\ G(1,1,1) \end{cases}$

3 إحداثيات مركز الثقل:

$\left(\frac{1+0+1}{3}, \frac{0+0+1}{3}, \frac{0+1+1}{3}\right)$

3 $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = L$

100

المسألة الثانية:

$f(x) = 2e^x - x - 2$

4 1) بفرض $\Delta : y = -x - 2$

4 $f(x) - y_\Delta = 2e^x$

4 $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_\Delta) = 0$

ومنه $\Delta : y = -x-2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

4 ولدراسة وضع C بالنسبة إلى Δ ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y_\Delta = 2e^x > 0$

4 ومنه C يقع فوق Δ دوماً.

2) f معرّفة ومستمرة واشتقاقية على $]-\infty, +\infty[$

4 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

عند $+\infty$:

4 $f(x) = e^x\left(2 - \frac{x}{e^x} - \frac{2}{e^x}\right)$

4 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

4 $f'(x) = 2e^x - 1$

4 نجد $f'(x) = 0$ ، $2e^x - 1 = 0$

$e^x = \frac{1}{2}$

4 $x = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

4 $f(-\ln 2) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 2 - 2$

$= -1 + \ln 2$

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1+\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4 4 4 4

$f(-\ln 2) = -1 + \ln 2$ قيمة صغرى محلياً.

4 3) في المجال $]-\infty, -\ln 2[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه

و $0 \in f(]-\infty, -\ln 2[) =]-1+\ln 2, +\infty[$

4 فالمعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد x_1 ينتمي إلى $]-\infty, -\ln 2[$

4 في المجال $[-\ln 2, +\infty[$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً عليه

$0 \in f([-\ln 2, +\infty[) = [-1+\ln 2, +\infty[$

فالمعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد x_2 ينتمي إلى $[-\ln 2, +\infty[$

4 $f(0) = 0$

ومنه $\boxed{x_2 = 0}$

لنثبت أن: $-2 < x_1 = \alpha < -1$

4 $f(-2) = 2e^{-2} > 0$

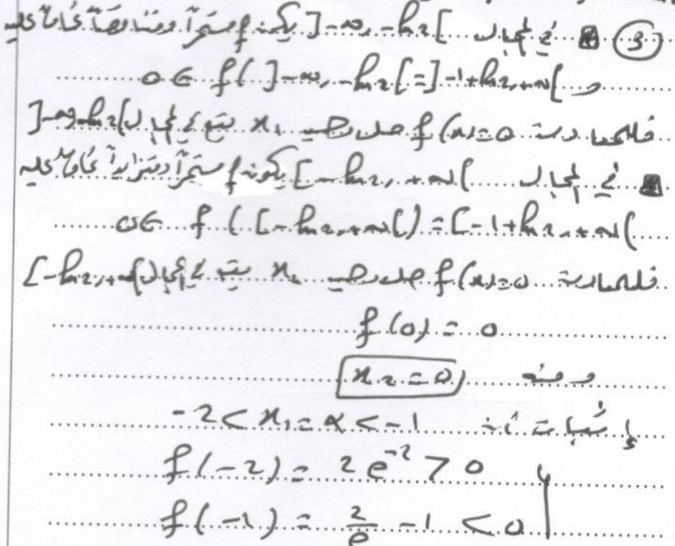
4 $f(-1) = \frac{2}{e} - 1 < 0$

4 بما أن $f(-1) \cdot f(-2) < 0$

إذن للمعادلة $f(x) = 0$ حل $x_1 = \alpha$ يحقق

$-2 < \alpha < -1$

4 4 4)



$y = -x - 2$

x	0	-2
y	-2	0

100

انتهت الأجوبة.