أولاً: أجيبي عن الأسئلة الثلاثة الآتية:

السؤال الأول:

1) f معرف على $]-\infty,-2] \cup]0,+\infty[$

3 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

3 $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$

3 مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=0}$

3 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

a: ميل المقارب المائل للخط C في جوار $-\infty$

3 $(-2,0)$ $(-3,1)$ $m = \frac{0-1}{-2+3} = \frac{-1}{1} = -1$

3 ومنه $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

3) المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$ يمر بالنقطتين $(-2,0)$ و $(0,2)$

3 $m = \frac{2-0}{0-(-2)} = 1$

3 $y - 2 = 1(x-0)$

3 $\boxed{y = x+2}$

4) 3 $f(-2) = 0$

3 f ليس اشتقاقياً عند $x=-2$

لأن المماس للخط C في هذه النقطة شاقولي

5) 3 $f'(\sqrt{2}) = 0$

مجموعة حلول المتراجحة $f(x) \geq 0$ هي

4 $x \in [\sqrt{2},+\infty[$

40

السؤال الثاني:

4 1) $M(1,0,3)$

4 $N(3,3,0)$

4 2) $I(2,0,0)$

4 $J(2,2,2)$

4 $O(2,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

4 $\overrightarrow{IJ}(0,2,2)$

4 $\overrightarrow{OJ}(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

4 $\overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{OJ}$

4 فالشعاعان $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{OJ}$ مرتبطان خطياً

4 فالنقاط O و I و J تقع على استقامة واحدة

40

السؤال الثالث:

حل المعادلة الآتية:

$e^{-2x} - e^{-x} - 6 = 0$

5+5 $(e^{-x}-3)(e^{-x}+2) = 0$

5 لأن $e^{-x}+2 \neq 0$

ومنه

5 $e^{-x} - 3 = 0$

5 $e^{-x} = 3$

5 $\ln e^{-x} = \ln 3$

5 $-x = \ln 3$

5 $\boxed{x = -\ln 3}$

40

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية :

التمرين الأول :

① إثبات أن $\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

5 $\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = \frac{(1+\frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\frac{1}{2}+\sqrt{3}) - i}{2-i}$

5 $= \frac{(1+\frac{\sqrt{3}}{2}) + i(\sqrt{3}-\frac{1}{2})}{2-i}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

5 $= \frac{\left((1+\frac{\sqrt{3}}{2}) + (\sqrt{3}-\frac{1}{2})i\right)(2+i)}{4+1}$

5 $= \frac{(2+\sqrt{3}) + (1+\frac{\sqrt{3}}{2})i + (2\sqrt{3}-1)i + (\frac{1}{2}-\cdots}{5}$

5 $= \frac{\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i}{5}$

5 $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$

$\frac{z_G - z_E}{z_F - z_E} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

5 $z_G - z_E = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_F - z_E)$

5 ومنه G هي صورة F وفق دوران مركزه E وزاويته $\frac{\pi}{3}$

5 فالمثلث EFG متساوي الأضلاع.

② $|z - z_E| = \sqrt{5}$

5 $ME = \sqrt{5}$

5 ومنه M تمثل مجموعة نقاط دائرة مركزها $E(0,1)$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$

5 $FE = |z_E - z_F| = |i-2| = \sqrt{5}$

ومنه F ينتمي إلى الدائرة التي مركزها E ونصف قطرها 5 أي $F \in ع$

60

التمرين الثاني :

$f(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x-1}$

4 ① f معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$

4 $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$

4 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

4+4 $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0$

	x	2		α		$+\infty$
4	$f'(x)$	‖		$-$		
4	$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	

4 f مستمرة ومتناقصة تماماً على $]2,+\infty[$

4 $f(]2,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

و $0 \in]-\infty,+\infty[$

4 فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α يقع في المجال $]2,+\infty[$

إثبات أنه $\alpha \in]2,3[$

4 لدينا $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$

4 و $f(3) = 1-\sqrt{2} < 0$

إشارات $\lim_{x\to 2} f(x)$ و $f(3)$

4 منه إشارتين مختلفتين

4 فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α يحقق $\alpha \in]2,3[$

60

التمرين الثالث :

$f(x) = \cos\sqrt{x}$

① نستطيع أن نجد مشتق التابع f عند (0) وهو

4 $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

المعرف على $]0, +\infty[$

4 $g(x) = \dfrac{\cos\sqrt{x} - 1}{x}$

4 $g(x) = -\dfrac{(1 - \cos\sqrt{x})}{x}$

4 $g(x) = \dfrac{-2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}$

4 $= -2\,\dfrac{\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{(\sqrt{x})^2}$

4 $= -2\left(\dfrac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}}\right)^2$

4 $= -2\left(\dfrac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{2\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2 \to 1$

4+4 $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} = f'(0)$

4 ومنه f اشتقاقي عند 0

ومعادلة المماس للخط C عند 0 هي

4 $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

4 $y = -\frac{1}{2}(x - 0) + 1$

4 $y = -\frac{1}{2}x + 1$

4 ② $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (-\sin\sqrt{x})$

4 $f'(x) = -\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

60

التمرين الرابع :

① $z^2 - 2z + 5 = 0$

5 $\Delta = 4 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0$

للمعادلة جذران في C

5 $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{16} = 4$

5 $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \dfrac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$

5 $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \dfrac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$

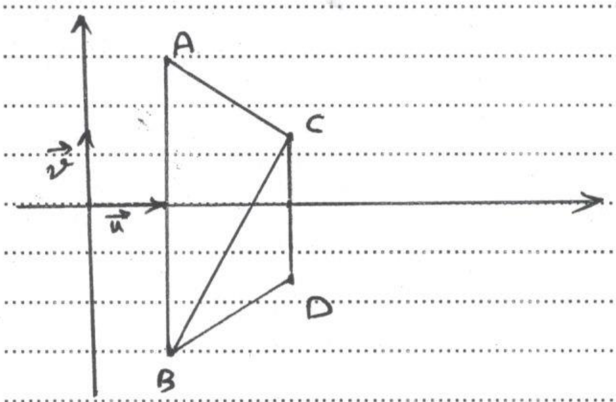
② a)

5 $z_A = 1 + 2i \longrightarrow A(1, 2)$

5 $z_B = 1 - 2i \longrightarrow B(1, -2)$

5 $z_C = 1 + \sqrt{3} + i \longrightarrow C(1 + \sqrt{3}, 1)$

5 $z_D = 1 + \sqrt{3} - i \longrightarrow D(1 + \sqrt{3}, -1)$



5

b) $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{1 - 2i - 1 - \sqrt{3} - i}{1 + 2i - 1 - \sqrt{3} - i}$

5 $= \dfrac{-\sqrt{3} - 3i}{-\sqrt{3} + i}$

نضرب بسط ومقام بمرافق المقام

5 $= \dfrac{(-\sqrt{3} - 3i)(-\sqrt{3} - i)}{3 + 1}$

$= \dfrac{3 + \sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i - 3}{4}$

5 $= \sqrt{3}\, i$

5 $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \sqrt{3}\, i$

5 $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(\sqrt{3}\, i)$

5 $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2}$

5 فالمثلث ABC قائم في C

③ مركز الدائرة المارة برؤوس مثلث قائم منتصف الوتر $[AB]$ وليكن I

5 $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+2i+1-2i}{2} = 1$

5 ومنه $I(1,0)$

$R = \frac{AB}{2}$

$AB = |z_B - z_A| = |1+2i-1-2i| = |-4i|$

5 $AB = 4$

$R = \frac{AB}{2} = 2$

$ID = |z_D - z_I| = |1+\sqrt{3}-i-1|$

$= |\sqrt{3} - i| = 2$

5 ومنه D تنتمي للدائرة التي مركزها I ونصف قطرها 2 .

100 ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

① $A(0,0,0)$

3 $B(3,0,0)$

3 $D(0,3,0)$

3 $C(3,3,0)$

3 $E(0,0,6)$

② 3 $O\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$

3 $\overrightarrow{EO}\left(+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -6\right)$

3 $\overrightarrow{BD}(-3, 3, 0)$

3 $\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\frac{3}{2}\right)(-3) + \left(\frac{3}{2}\right)(3) + (-6)(0)$

3 $= -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 0 = 0$

3 ومنه $(BD) \perp (EO)$

3 $S(DBE) = \frac{1}{2}\, BD \cdot EO$

3 $BD = 3\sqrt{2}$ (قطر المربع)

$EO = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 36}$

3 $= \sqrt{\frac{9}{2} + 36} = \sqrt{\frac{81}{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$

3 $S(DBE) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{27}{2}$

③ a) $G\left(\frac{0+3+0}{3}, \frac{0+3+3}{3}, \frac{6+0+0}{3}\right)$

3 $G(1, 2, 2)$

3 $\overrightarrow{BE}(-3, 0, 6)$

3 $\overrightarrow{AG}(1, 2, 2)$

3 $\overrightarrow{AO}\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$

b) نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AO}$ و $\overrightarrow{AG}$

3 غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{1}{\frac{3}{2}} \neq \frac{2}{\frac{3}{2}}\right)$ فهما شعاعا توجيه المستوي (AOG)

لإثبات أن المستقيم (BE) يوازي المستوي (AOG)

يكفي أن نثبت بأن الأشعة $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{BE}$ مرتبطة خطياً

لذلك نبحث عن عددين حقيقيين α و β

2 يحققان: $\overrightarrow{BE} = \alpha \overrightarrow{AO} + \beta \overrightarrow{AG}$

3 $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3 $\frac{3}{2}\alpha + \beta = -3 \quad (1)$

3 $\frac{3}{2}\alpha + 2\beta = 0 \quad (2)$

3 $2\beta = 6 \quad (3)$

لما حل (1) ، (2) ، (3)

3 من (2) نجد أن $\boxed{\beta=3}$

نعوض في (2) فنجد:

$\frac{3}{2}\alpha + 2(3) = 0$

$\frac{3}{2}\alpha = -6$

3 $\boxed{\alpha = -4}$

نتحقق بالتعويض في (1)

3 $\frac{3}{2}(-4) + 3 = -6+3 = -3$ محققة

3 ومنه $\vec{BE} = -4\vec{AO} + 3\vec{AG}$

3 بما أن الأشعة $\vec{BE}$ و $\vec{AO}$ و $\vec{AG}$ مرتبطة خطياً

3 فالمستقيم (BE) يوازي المستوي (AOG).

(4)

3 $r = CD = 3$

3 $h = AD = 3$

رأس المخروط $A(0,0,0)$ ومحوره (Ay)

معادلته

3 $x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0$ حيث $0\le y\le y_1$

+3/2 $x^2+z^2-y^2=0$ حيث $0\le y\le 3$

100

المسألة الثانية:

$f(x) = \frac{1}{x\ln x}$

(1)

5 $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

5 ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي.

5 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

5, 5 $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ } $\boxed{x=1}$ مستقيم مقارب شاقولي

5 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي.

5

(2) f مستمرة واشتقاقية على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

5 $f'(x) = \frac{0-(1\ln x+1)}{(x\ln x)^2}$

5 $f'(x) = \frac{-1-\ln x}{(x\ln x)^2}$

5 $f'(x)=0$ عندما $-1-\ln x = 0$

$\ln x = -1$

5 $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

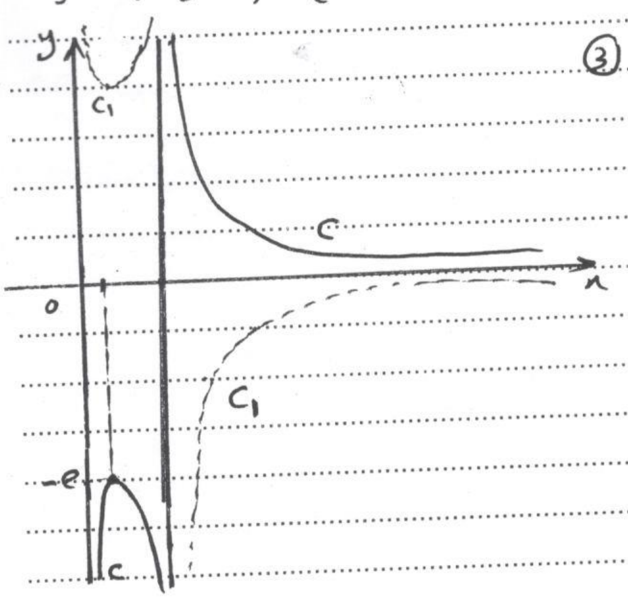
5 $f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{\frac{1}{e}\ln(\frac{1}{e})} = \frac{1}{\frac{1}{e}(-1)} = -e$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-e$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	0

5, 5, 5

5 $f(\frac{1}{e}) = -e$ قيمة كبرى محلياً

(3)



5 + 5 +5 لرسم C_1

(4)

5 $f_1(x) = \frac{1}{x\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{-x\ln x}$

$f_1(x) = -f(x)$

ومنه C_1 هو نظير C بالنسبة إلى محور الفواصل

100

انتهى السلم