أولاً: أجيبي عن الأسئلة الثلاثة الآتية:

السؤال الأول:

① f معرف على $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

4 $\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = +\infty$

4 $\lim_{x\to(-2)^+} f(x) = +\infty$

2 مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=-2}$

2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

② $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$

حيث a ميل المقارب المائل للخط C في جوار $+\infty$

4 ومنه $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

③ المقارب المائل للخط C في جوار $-\infty$

يمر بالنقطتين $(1,0)$ و $(0,1)$

4 $m = \frac{1-0}{0-1} = -1$

معادلته:

$y-1 = -1(x-0)$

4 $\boxed{y=-x+1}$

④ f ليس اشتقاقياً عند $x=-1$

4 لأن للخط C مماس شاقولي عند تلك النقطة.

⑤ 4 $f'(0)=0$

4 $f'(-3)=0$

40

السؤال الثاني:

$f(x) = x\sqrt{x(\frac{\pi}{2}-x)} + \sin x$

نضع تابع معدل التغير للتابع f عند (0) وهو

6 $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

المعرف على $]0,\frac{\pi}{2}]$

6 $g(x) = \frac{x\sqrt{x(\frac{\pi}{2}-x)} + \sin x}{x}$

6+6 $g(x) = \sqrt{x(\frac{\pi}{2}-x)} + \frac{\sin x}{x}$

6+4 $\lim_{x\to 0} g(x) = 0+1 = 1 = f'(0)$

6 ومنه f اشتقاقي عند $x=0$

40

السؤال الثالث:

① 4+4 $\vec{AO}\cdot\vec{CG} = \vec{AO}\cdot\vec{AE}$
$= \vec{AE}\cdot\vec{AE} = \|\vec{AE}\|^2 = 16$

② 4 $\vec{AO}\cdot\vec{GI} = \vec{AO}\cdot(-\frac{1}{2}\vec{CG})$

4 $= (-\frac{1}{2})(\vec{AO}\cdot\vec{CG})$

4 $= -\frac{1}{2}(16) = -8$

③ 4 $\vec{AO}\cdot\vec{EC} = (\vec{AE}+\vec{EO})\cdot(\vec{EG}+\vec{GC})$

4 $= \vec{AE}\cdot\vec{EG} + \vec{AE}\cdot\vec{GC} + \vec{EO}\cdot\vec{EG} + \vec{EO}\cdot\vec{GC}$

4 $= 0 + -\|\vec{EA}\|^2 + 2\sqrt{2}\,4\sqrt{2} + 0$

4 $= -16+16 = 0$

4 ومنه نستنتج أن المستقيمين (AO) و (EC) متعامدان.

40

ثانياً: حلي التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

6 ① $Z' = \overline{Z_G} = \overline{2+3i} = 2-3i$

6 ② $(\overrightarrow{\Omega G}, \overrightarrow{\Omega H}) = \arg\left(\dfrac{Z_H - Z_\Omega}{Z_G - Z_\Omega}\right)$

6 $\dfrac{Z_H - Z_\Omega}{Z_G - Z_\Omega} = \dfrac{1+(2+\sqrt{2})i-1-2i}{2+3i-1-2i}$

$= \dfrac{\sqrt{2}\, i}{1+i}$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

6 $= \dfrac{\sqrt{2}\, i\,(1-i)}{1+1}$

6 $= \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}\, i}{2}$

6 $= \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i = e^{i\frac{\pi}{4}}$

6 $\arg\left(\dfrac{Z_H - Z_\Omega}{Z_G - Z_\Omega}\right) = \arg\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

6 $(\overrightarrow{\Omega G}, \overrightarrow{\Omega H}) = \dfrac{\pi}{4} \quad (2\pi)$

6 وبما أن $\dfrac{Z_H - Z_\Omega}{Z_G - Z_\Omega} = e^{i\frac{\pi}{4}}$

6 فإن $Z_H - Z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{4}}(Z_G - Z_\Omega)$

وهي الصيغة العقدية للدوران $R_{\Omega,\frac{\pi}{4}}(G) = H$

60

التمرين الثاني:

$f(x) = x.E(x) + (x - E(x))^3$

①

8 $f(x) = x^3 \quad ; 0 \le x < 1$

8 $f(x) = x + (x-1)^3 \quad ; 1 \le x < 2$

8 $f(x) = 4 \quad ; x = 2$

6 ② من الواضح أن f مستمرة على $[0,2] \setminus \{1,2\}$

(لنفحص إذا f مستمرة عند 1 ، 2)

لندرس استمرار f عند 1:

6 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^3) = 1 = f(1)$

6 لكن $f(1) = 1 + (1-1)^3 = 1$

6 ومنه f مستمرة عند $x = 1$

لندرس استمرار f عند 2:

6 $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x + (x-1)^3)$

$= 3 \neq f(2) = 4$

3 ومنه f ليست مستمرة عند 2.

3 وبالتالي f ليست مستمرة على $[0,2]$.

60

التمرين الثالث:

$f(x) = \ln(ax^2+bx+c)$

(1) معادلة المماس للخط c في النقطة B:

4 $y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

4 $f'(0) = \frac{\ln 10 - \ln 2}{0-(-2)} = \frac{\ln 5}{2}$

4 $f(0)=\ln 10$

$y = \frac{\ln 5}{2}(x-0)+\ln 10$

4 $\boxed{y = \frac{\ln 5}{2}x + \ln 10}$

معادلة المماس للخط c في النقطة A

4 $\boxed{y=\ln 2}$

(2) ومنه $B(0,\ln 10)\in C$

4 $f(0)=\ln 10$

$\ln c = \ln 10$

4 ومنه $\boxed{c=10}$ (1)

ومنه $A(-2,\ln 2)\in C$

4 $f(-2)=\ln 2$

$\ln(4a-2b+c)=\ln 2$

4 $\boxed{4a-2b+c=2}$ (2)

4 $f'(x)=\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$

4 $f'(-2)=0$

ومنه

$\frac{-4a+b}{4a-2b+c}=0$

وبالتالي $-4a+b=0$

4 $\boxed{b=4a}$ (3)

لنعوض (1) و (3) في (2)

$4a-2(4a)+10=2$

4 $-4a=-8$

$\boxed{a=2}$

4 $\boxed{b=8}$ نعوض في (3) فنجد

فالتابع المطلوب هو:

4 $f(x)=\ln(2x^2+8x+10)$

60 التمرين الرابع:

(1) $A(0,0,0)$ و $E(0,0,2)$

8×3 $B(2,0,0)$ و $F(2,0,2)$

$D(0,2,0)$ و $H(0,2,2)$

$C(2,2,0)$ و $G(2,2,2)$

3 (2) لدينا $BG=2\sqrt{2}$

3 و $BN=1$

3 ومنه $BG=2\sqrt{2}\,BN$

لإيجاد إحداثيات النقطة N

3 نلاحظ أن $\vec{BG}=2\sqrt{2}\,\vec{BN}$ بافتراض

3 $N(x,y,z)$ نجد: $\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=2\sqrt{2}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z\end{pmatrix}$

3 $\boxed{x=2}$

3 $\boxed{y=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

3 $\boxed{z=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

3 ومنه $N\left(2,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3 إحداثيات النقطة M هي $M(0,0,1)$

3 (3) $I(1,0,0)$

لدينا J منتصف [MN] لذا

3 $J\left(1,\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

4 $\vec{IJ}\left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

4 $\vec{MN}\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$

4 $\vec{AB}\left(2, 0, 0\right)$

4 $\vec{IJ}\cdot\vec{MN} = 0 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$

4 $= 0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)$

4 $= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$

ومنه $(MN) \perp (IJ)$

$\vec{IJ}\cdot\vec{AB} = (0)(2) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(0) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(0)$

4 $= 0$

4 ومنه $(AB) \perp (IJ)$

4 إن الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{MN}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{2}{2} \neq 0\right)$

4 فالمستقيمان (AB) و (MN) غير متوازيين.

100 ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

① $z_A = \sqrt{3} - i$

3 $r = |z_A| = \sqrt{3+1} = 2$

3 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\theta \in$ (الربع الرابع)

3 $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{2}$ ، $\theta = \frac{-\pi}{6}$

3 $z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_B = 1 + i\sqrt{3}$

3 $r = |z_B| = \sqrt{1+3} = 2$

3 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$ ، $\theta \in$ (الربع الأول)

3 $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{3}$

3 $\boxed{z_B = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

3 $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ②

3 $\frac{z_B}{z_A} = i$

3 $\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = i$

3 $\arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg(i)$

3 $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2}$

3 فالمثلث OAB قائم في O.

3 $\left|\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right| = |i|$

3 $\frac{|z_B - z_O|}{|z_A - z_O|} = 1$

3 $|z_B - z_O| = |z_A - z_O|$

3 $\boxed{OB = OA}$

3 فالمثلث OAB متساوي الساقين

3 فأصبح المثلث OAB قائم في O ومتساوي الساقين

3 ولما كان $z_C = z_A + z_B$

3 كان $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$

3 فالشكل $OACB$ متوازي أضلاع

3 فيه زاوية قائمة فهو مستطيل

3 وفيه ضلعان متجاوران متساويان فهو مربع.

3) a) $(\vec{u},\vec{OA}) + (\vec{OA},\vec{OC}) = (\vec{u},\vec{OC})$

ومنه:

$(\vec{u},\vec{OC}) = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$ 3

b) $|Z_C| = OC = 2\sqrt{2}$ 3

$\arg(Z_C) = (\vec{u},\vec{OC}) = \frac{\pi}{12}$ 3

ومنه $\boxed{Z_C = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}}$ 3

c) بالمقارنة بين الشكل الجبري والأسي للعدد Z_C نجد:

$2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$ 3

$e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\, i$ 3

$\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\, i$ 3

$\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$ 2

$\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$ 2

100

المسألة الثانية:

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ 4

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1$ 4

ومنه

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to 1}\ln X = 0$ 4

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1$

4 ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to 1}\ln X = 0$

4 ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي لـ C

في جوار $+\infty$ و $-\infty$

4 $\lim_{x\to(-1)^-}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$

ومنه

4 $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = \lim_{X\to 0}\ln X = -\infty$

4 ومنه $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي

4 $\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} = +\infty$

4 ومنه $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{X\to+\infty}\ln X = +\infty$

4 ومنه $\boxed{x=1}$ مستقيم مقارب شاقولي

2) إثبات أن التابع f فردي:

الشرط 1: أياً كان $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

4 فإن $-x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ محقق

الشرط 2: $f(-x) = f(x)$

4 $f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$

$= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

4 $= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1}$

4 $= -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -f(x)$ محقق

ومنه f تابع فردي

4

ومخطط البياني متناظر بالنسبة إلى $O(0,0)$

(3)

4 $f'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)'}{\dfrac{x+1}{x-1}}$

$f'(x) = \dfrac{\dfrac{1(x-1)-1(x+1)}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}}$

4 $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)(x+1)} < 0$

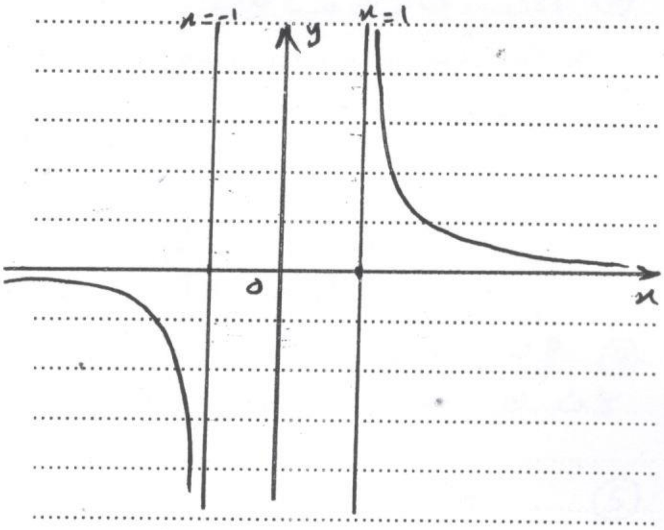
ومنه f متناقصة تماما على كل من

المجالين $]-\infty,-1[$ و $]1,+\infty[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	0

4 4 4

4



(4)

$g(x) = x\,f(x)$

4 $g'(x) = (1)\,f(x) + f'(x)\cdot x$

4 $g'(x) = f(x) + \dfrac{-2}{x^2-1}\cdot x$

4 $\boxed{f(x) = g'(x) + \dfrac{2x}{x^2-1}}$

100

انتهى السلم