أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

$f(x) = (ax^2+bx+c)\,e^{-x}$

3 (1) $f(0)=1$

$(a(0)^2+b(0)+c)\,e^{0} = 1$

3 $\boxed{c=1}$

3 $f'(0)=0$

3 $f'(x) = (2ax+b)\,e^{-x} - e^{-x}(ax^2+bx+c)$

$f'(x) = (-ax^2+(-b+2a)x+b-c)\,e^{-x}$

3 $f'(0)=0$

$b-c=0$

ومنه $b=c$

3 وبالتالي $\boxed{b=1}$

3 $f'(1)=0$

$(-a-b+2a+b-c)\,e^{-1}=0$

2 $a-c=0$

$a=c$

3 $\boxed{a=1}$

فالتابع المطلوب

$f(x)=(x^2+x+1)\,e^{-x}$

(2) عند $+\infty$:

3 $f(x) = \frac{x^2}{e^x} + \frac{x}{e^x} + e^{-x}$

علماً أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

3 ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

21

عند $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1) = +\infty$

2 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

3 ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f(1) = 3\,e^{-1} = \frac{3}{e}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$\frac{3}{e}$	↘	0

3

40

السؤال الثاني:

$\binom{n+7}{n+5} = 5\,P^{1}_{n+4}$

4 شرط الحل: $n+7 \geq n+5$ و $n+4 \geq 1$

$7 \geq 5$ و $n \geq -3$

4 $n \in \{-3,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

4 $\binom{n+7}{n+5} = \binom{n+7}{(n+7)-(n+5)} = \binom{n+7}{2}$

تصبح المعادلة من الشكل

4 $\binom{n+7}{2} = 5\,P^{1}_{n+4}$

4 $\frac{(n+7)(n+6)}{2!} = 5(n+4)$

4 $(n+7)(n+6) = 10n+40$

4 $n^2+13n+42 = 10n+40$

4 $n^2+3n+2 = 0$

$(n+2)(n+1) = 0$

4 إما $n+2=0 \Rightarrow \boxed{n=-2}$ مقبول

4 أو $n+1=0 \Rightarrow \boxed{n=-1}$ مقبول

$S=\{-2,-1\}$

40

السؤال الثالث:

الخاصة المطلوب إثباتها هي

5 $E(n): \ll \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}} \gg$

ونريد إثبات هذه الخاصة أيًّا كان العدد الطبيعي $n \geq 1$

(I) الخاصة $E(1)$ صحيحة لأن

5 $1 \le \frac{1}{1!} = 1$ محققة

5 (II) لنفترض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة، ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

أي يجب أن نثبت

$E(n+1): \ll \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^{n}} \gg$

5 $\ell_1 = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

فرضية

ولدينا فرضاً $n \geq 1$ ومنه $n+1 \geq 2$

5 $\boxed{\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2}}$ ...(*)

ومنه

5 $\ell_1 = \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{(n+1)} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}}$

حسب (*)

5 $\ell_1 = \frac{1}{(n+1)!} \le \frac{1}{2^{n}} = \ell_2$

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$

5 فالخاصة $E(n)$ صحيحة أيًّا كان العدد الطبيعي n.

40

السؤال الرابع:

(1) علماً أن G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD، فإن G هو مركز الأبعاد

3 المتناسبة للنقاط المثقلة

(A,1) و (B,1) و (C,1) و (D,1)

علماً أن K مركز ثقل المثلث BCD

3 فإن K هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (B,1) و (C,1) و (D,1)

حسب الخاصة التجميعية يكون G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

3 (A,1) و (K,3)

3 ومنه $\vec{AG} = \frac{3}{1+3}\vec{AK}$

2 $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AK}$

(2) علماً أن I منتصف [AB] فإن

3 I هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,1) و (B,1)

وعلماً أن J منتصف [CD] فإن

3 J هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (C,1) و (D,1)

ومنه G هو مركز الأبعاد المتناسبة

3 للنقطتين (I,2) و (J,2)

وبالتالي فالنقاط G و I و J تقع

3 على استقامة واحدة

(G منتصف [IJ])

3 $\vec{AB}\cdot\vec{CD} = \vec{AB}\cdot(\vec{CB}+\vec{BD})$ (3)

3 $= \vec{AB}\cdot\vec{CB} + \vec{AB}\cdot\vec{BD}$

3 $= \vec{BA}\cdot\vec{BC} - \vec{BA}\cdot\vec{BD}$

3 $= a\cdot a\cdot\frac{1}{2} - a\cdot a\cdot\frac{1}{2} = 0$

ومنه فالشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ متعامدان

2 فالمستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

40

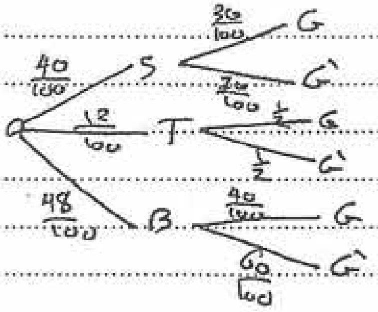
ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$P(S)=\frac{20}{50}=\frac{40}{100}$ 5

$P(T)=\frac{6}{50}=\frac{12}{100}$ 5

$P(B)=\frac{24}{50}=\frac{48}{100}$ 5



5

(1) $P(B\cap G)=?$

$P(B\cap G)=\frac{48}{100}\times\frac{40}{100}$ 5

$\boxed{P(B\cap G)=\frac{192}{1000}}$ 5

(2) $P(G)=?$

$P(G)=P(S\cap G)+P(T\cap G)+P(B\cap G)$ 5

$P(G)=\frac{40}{100}\times\frac{30}{100}+\frac{12}{100}\times\frac{50}{100}+\frac{192}{1000}$

$=\frac{120+60+192}{1000}$

$P(G)=\frac{372}{1000}$ 5

(3) $P(S\mid G')=?$

$P(S\mid G')=\frac{P(S\cap G')}{P(G')}$ 5

$P(G')=1-P(G)=1-\frac{372}{1000}$ 5

$P(G')=\frac{628}{1000}$

$P(S\cap G')=\frac{40}{100}\times\frac{70}{100}=\frac{280}{1000}$ 5

$P(S\mid G')=\frac{280}{628}$ 5

60

التمرين الثاني:

$f(x)=x\,e^{\sqrt{x}}$

(1) نضع T.T معدل التغير للتابع f عند $x=0$ وهو:

6 $g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

المعرف على $\mathbb{R}^*$

6 $g(x)=\frac{x e^{\sqrt{x}}-0}{x}$

6 $g(x)=e^{\sqrt{x}}$

$\lim_{x\to 0} g(x)=1=f'(0)$

6 ومنه فالتابع f قابل للاشتقاق عند $x=0$

ويكون $f'(0)=1$

ويكون معادلة المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها $x=0$ هي:

6 $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$y=1(x-0)+0$

6 $d:\ \boxed{y=x}$

(2) لدراسة وضع C بالنسبة إلى d ندرس إشارة الفرق

6 $f(x)-y=x\,e^{\sqrt{x}}-x$

6 $f(x)-y=x\,(e^{\sqrt{x}}-1)$

$f(x)-y=0$ عندما $\boxed{x=0}$

6 أو $e^{\sqrt{x}}-1=0 \Rightarrow e^{\sqrt{x}}=1$

ومنه $\boxed{x=0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	+	0	+
الوضع النسبي	C فوق d	نقطة مشتركة بين C و d $(0,0)$	C فوق d

6

60

التمرين الثالث:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n} \end{cases}$$

① $f(x) = \frac{x}{2-x}$

f اشتقاقي على $[0,1]$

2 $f'(x) = \frac{1(2-x)-(-1)(x)}{(2-x)^2}$

2 $f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$

2 فالتابع f متزايد تماماً على $[0,1]$

إثبات أن $0 < u_n < 1$

الخاصة المطلوب إثباتها هي:

2 $E(n): \ll 0 < u_n < 1 \gg$

نريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n.

(I) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن

2 $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$ محققة

(II) لنفترض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة، ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$ 2

2 $E(n+1): \ll 0 < u_{n+1} < 1 \gg$

2 لدينا فرضاً $0 < u_n < 1$

2 وبما أن f متزايد تماماً على $[0,1]$ فإن: $f(0) < f(u_n) < f(1)$

2 $0 < u_{n+1} < 1$

2 فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$ فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

٢٢

② 2 $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2-u_n} - u_n$

2 $= \frac{u_n - 2u_n + u_n^2}{2-u_n}$

2 $= \frac{u_n^2 - u_n}{2-u_n}$

2 $= \frac{u_n(u_n-1)}{(2-u_n)}$

لكن: $0 < u_n < 1$

2 $2-u_n > 0$, $u_n > 0$, $u_n - 1 < 0$

2 ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$

2 فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة تماماً.

③ $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$

2 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{u_{n+1}} - 1}{\frac{1}{u_n} - 1}$

2 $= \frac{\frac{2-u_n}{u_n} - 1}{\frac{1-u_n}{u_n}}$

2 $= \frac{2 - u_n - u_n}{1-u_n}$

2 $= \frac{2-2u_n}{1-u_n}$

2 $= \frac{2(1-u_n)}{1-u_n} = 2 = q$

2 فالمتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هندسية

2 أساسها $q = 2$

$v_0 = \frac{1}{u_0} - 1$

2 $\boxed{v_0 = 1}$

$v_n = v_0 \, q^n$

2 $\boxed{v_n = 2^n}$

$v_n = \frac{1}{U_n} - 1$

$\frac{1}{U_n} = v_n + 1$ [illegible]

$U_n = \frac{1}{1+v_n}$

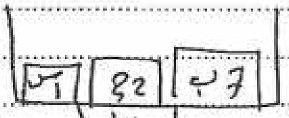
2 $\boxed{U_n = \frac{1}{1+2^n}}$

2 [illegible] $\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ [illegible] 9.71

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$ [illegible]

60 التمرين الرابع :

السحب 3 كرات معاً التتالي مع إعادة



① $\{ (ب, ب, ب)_{\times 3}, (ع, ع, ج)_{\times 3}, (س, س, ت)_{\times 3} \}$

5x3 $7\times7\times3\times3 + 2\times2\times8\times3 + 1\times1\times9\times3$

$= 441 + 96 + 27$

5 $= 564$

② نفرض B حدث: "كرة سحبت ولم تكن قد ظهرت بين الكرات المسحوبة"

5 A حدث: "ظهور كرة حمراء واحدة فقط"

$P(A|B) = ?$

5 $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$B' = \{ (ت, ت, ت) \}$

5 $P(B') = \frac{9\times9\times9}{10\times10\times10} = \frac{729}{1000}$

5 $P(B) = 1 - P(B') = \frac{271}{1000}$

5+5 $A\cap B = \{ (ح, ت, ت)_{\times 3}, (ح, ح, ت)_{\times 3!} \}$

$P(A\cap B) = \frac{1\times1\times2\times3 + 1\times2\times7\times6}{1000}$

5 $P(A\cap B) = \frac{6+84}{1000} = \frac{90}{1000}$

5 $P(A|B) = \frac{\frac{90}{1000}}{\frac{271}{1000}} = \frac{90}{271}$

60 ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى :

① a.

3 $\vec{AB}(3, 2, -2)$

3 $\vec{AC}(0, 2, 1)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (3)(0) + (2)(2) + (-2)(1)$

3 $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 2$

3 $\|\vec{AB}\| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

3 $\|\vec{AC}\| = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}$

3 $\cos B\hat{A}C = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|}$

3 $= \frac{2}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{5}}$

3 $\boxed{\cos B\hat{A}C = \frac{2}{\sqrt{85}}}$

٢٥

ط، نلاحظ أن الشعاعين $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$
3 غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما
غير متناسبة $\left(\frac{0}{3} \neq \frac{2}{2}\right)$

3 فالنقاط A ، B ، C لا تقع على
استقامة واحدة

(2) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظماً على
3 المستوي (ABC)
فيكون $\vec{n} \perp \vec{AB}$ ومنه $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$

3 $\boxed{3a + 2b - 2c = 0}$ --- (I)

$\vec{n} \perp \vec{AC}$ ومنه
3 $\boxed{2b + c = 0}$ --- II
نعطي قيمة اختيارية لـ c
ولتكن $\boxed{c = 2}$ فيكون
$2b + 2 = 0$
3 ومنه $\boxed{b = -1}$
نعوض في (I)
$3a - 2 - 4 = 0$
3 $\boxed{a = 2}$
ومنه $\vec{n}(2,-1,2)$ ناظم على المستوي
(ABC).
$2(x+2) - 1(y-0) + 2(z-1) = 0$
3 $\boxed{2x - y + 2z + 2 = 0}$

3 $\vec{n}_{P_1}(1,1,-3)$ (3)

3 $\vec{n}_{P_2}(1,-2,6)$
نلاحظ أن الشعاعين $\vec{n}_{P_1}$ ، $\vec{n}_{P_2}$
غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما
3 غير متناسبة $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}\right)$
فالمستويان P_1 ، P_2 متقاطعان
بفصل مشترك

3 $\begin{cases} x + y = 3z - 3 \\ x - 2y = -6z \end{cases}$
بالطرح:

$3y = 9z - 3$
3 $\boxed{y = 3z - 1}$

بالتعويض
3 $x + 3z - 1 = 3z - 3$
$\boxed{x = -2}$

نفرض $z = t$ نحصل على تمثيل وسيطي
للمستقيم d وهو

3 $d: \begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

(4)
2 $\vec{n}(2,-1,2)$
2 $\vec{v}_d(0,3,1)$

3 $\vec{n} \cdot \vec{v}_d = (2)(0) + (-1)(3) + (2)(1)$
$= -1 \neq 0$
ومنه فالمستقيم d يقطع المستوي (ABC)
بنقطة I وحيدة إحداثياتها
نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم d
في معادلة المستوي فنجد
3 $2(-2) - (3t - 1) + 2t + 2 = 0$
$-4 - 3t + 1 + 2t + 2 = 0$
3 $\boxed{t = -1}$

3 $\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{I(-2,-4,-1)}$

(5) معادلة الكرة هي:
3 $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 9$

3 $dist(\Omega, (ABC)) = \frac{|2(1) - (-3) + 2(1) + 2|}{\sqrt{4+1+4}}$

3 $= \frac{9}{3} = 3 = R$

3 ومنه المستوي (ABC) مماس للكرة S

100

٢٦

المسألة الثانية :

$f(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})$

5 ① أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$

محقق وصحيح.

5 $f(-x)=\ln(e^{-x}+e^{x})=f(x)$

ما سبق محقق

ومنه التابع f تابع زوجي

5 ومحور التراتيب محور تناظر للخط البياني

② $f(x)=x+\ln(1+e^{-2x})$

5 $f_1=f(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})$

5 $=\ln(e^{x}(1+e^{-2x}))$

$=\ln e^{x}+\ln(1+e^{-2x})$

5 $=x+\ln(1+e^{-2x})=f_2$

5 $f(x)-y_D=\ln(1+e^{-2x})$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_D)=\ln 1=0$

ومنه المستقيم D الذي معادلته $\boxed{y=x}$

5 مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$

③ f مستمر وقابل للاشتقاق على $[0,+\infty[$

5 $f(0)=\ln 2$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

5 $f'(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

نحل $f'(x)=0$

5 $e^{x}-e^{-x}=0$

$e^{x}=e^{-x}$

ومنه $x=-x$

$2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

5 $f(0)=\ln 2$

5

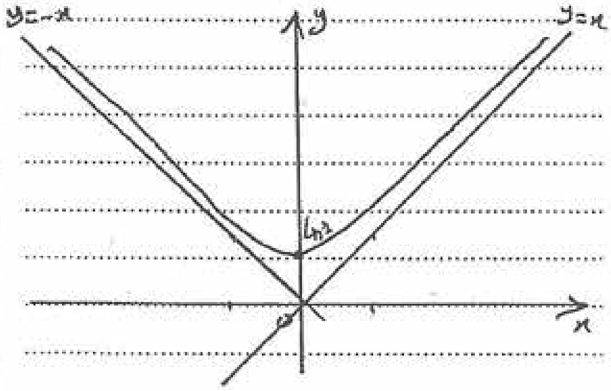
x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$
$f(x)$	$\ln 2$	$\nearrow +\infty$

5 بالاستفادة من جدول التغيرات نرسم

f على $[0,+\infty[$ ثم نكمل رسمه

على $]-\infty,0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

5 + 5



④ $g(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

5 $G(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})+k$

5 الشرط : $G(\ln 2)=0$

$\ln(2+\frac{1}{2})+k=0$

$k=-\ln\frac{5}{2}$

فالتابع الأصلي المطلوب هو :

5 $G(x)=\ln(e^{x}+e^{-x})-\ln\frac{5}{2}$

100