أولاً: أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول:

5+5 (1) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

5+5 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

5 (2) $f'(x) = g'(x) . e^{g(x)}$

$e^{g(x)}$ موجب دائماً

فإشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$ (5)		$+$	0	$-$	
$f(x)$ (5)	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	1

السؤال الثاني: 40

(1) $\underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }\ \underline{\ }$ ، 0 ، 2

يوجد رقمين مختلفين لتعبئة ثماني خانات

10+10 $1\times1\times(2)^8 = 256$

(2) عدد طرق اختيار ثلاث خانات

8 • لتعبئة الأرقام 7 7 7 يساوي $\binom{6}{3}$

8 • عدد طرق تعبئة 6,1,5 يساوي P_3^3

ومنه

4 $\binom{6}{3}\times P_3^3 = 20\times 6 = 120$

طريقة ثانية: $P_6^3 \times \binom{3}{3} = 120$

أو أي طريقة أخرى.

السؤال الثالث: 40

الخاصة المطلوب إثباتها هي:

5 $E(n)$: «$1\times2+2\times3+\dots+n\times(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$»

ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$

5 (I) الخاصة $E(1)$ صحيحة لأن

$1\times2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$

$2 = 2$ محققة

5 (II) لنفترض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة

5 ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

$E(n+1)$: «$1\times2+2\times3+\dots+n\times(n+1)+(n+1)\times(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$»

5 $\ell_1 = 1\times2+2\times3+\dots+n\times(n+1)+(n+1)(n+2)$

5 $= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$

$= \frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}$

5 $= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} = \ell_2$

5 فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$ فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

السؤال الرابع: 40

$P: x+2y-z+1=0$

$Q: 2x+y-z+2=0$

4 (1) $\vec{n}_P(1,2,-1)$

4 $\vec{n}_Q(2,1,-1)$

4 نلاحظ أن الشعاعين $\vec{n}_Q$ و $\vec{n}_P$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $(\frac{1}{2} \neq \frac{2}{1})$

فالمستويان P و Q متقاطعان

4 $\begin{cases} x - z = -2y - 1 \\ 2x - z = -y - 2 \end{cases}$

4 بالطرح: $\boxed{x = y - 1}$

نعوض: $y - 1 - z = -2y - 1$

4 $\boxed{z = 3y}$

4 نفرض $y = t$ نحصل على تمثيل وسيطي d

الفصل المشترك للمستويين P و Q هو

4 $d: \begin{cases} x = t-1 \\ y = t \\ z = 3t \end{cases} \quad : t \in \mathbb{R}$

(2) $\vec{n}_R = \vec{v}_d = (1, 1, 3)$

4

معادلة المستوي R وهو يمر بالنقطة $A(2,1,-1)$

فتكون معادلته:

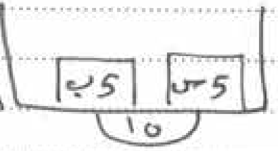
$1(x-2) + 1(y-1) + 3(z+1) = 0$

4 $\boxed{x + y + 3z = 0}$

40 ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية:

التمرين الأول:

اسحب 3 كرات على التتالي مع إعادة



8 $n(\Omega) = 10 \times 10 \times 10 = 1000$ (1)

$\{(ب,ب,ب), (س,س,س)\}$

$P = \frac{5 \times 5 \times 5 + 5 \times 5 \times 5}{1000}$

8 $P = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$

8 $P(A) = 1 - P = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

أو حساب

(2) $\{(ب,ب,س)\}_{\times 3}$

8 $P_1 = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 3}{1000} = \frac{3}{8}$

$B = \{(ب,ب,س)_{\times 3}, (ب,ب,ب)\}$

$P(B) = P_1 + \frac{5 \times 5 \times 5}{1000}$

8 $P(B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

حل آخر للسؤال (1)

$P(A) = \frac{(5)^2 \cdot 5 \times 3 + (5)^2 \times 5 \times 3}{1000} = \frac{750}{1000} = \frac{3}{4}$

(3) $P(A \cap B) = P\{(س,س,ب)\} \times 3$

8 $P(A \cap B) = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 3}{1000} = \frac{3}{8}$

8 $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

نلاحظ أن:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

4 فالحدثان A و B مستقلان احتمالياً

60 التمرين الثاني:

$f(x) = \frac{x}{|x| + 2}$

(1) نضع تابع معدل التغير للتابع f عند $x = 0$ وهو

8 $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

المعرف على $\mathbb{R}^*$

8 $g(x) = \frac{\frac{x}{|x|+2} - 0}{x}$

8 $g(x) = \frac{1}{|x| + 2}$

8 $\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{1}{2} = f'(0)$

8 ومنه f اشتقاقي عند $x = 0$

معادلة المماس للخط C في نقطة منه فاصلتها $x = 0$ هي:

8 $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$y = \frac{1}{2}(x - 0) + 0$

8 $\boxed{y = \frac{1}{2} x}$

8 (2) عندما $x \in]-\infty, 0[$ يكون $|x| = -x$

$f(x) = \frac{x}{-x + 2}$

$$\begin{array}{r|l} x & -x+2 \\ \mp x \pm 2 & -1 \\ \hline 2 & \end{array}$$

8 $f(x) = -1 + \frac{2}{-x+2}$

f مستمرة على $]-\infty, 0[$

8 $F(x) = -x - 2\ln(-x+2)$

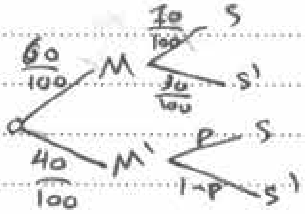
80

التمرين الثالث:

$P(M) = \frac{60}{100}$

$P(S|M) = \frac{70}{100}$

$P(S) = \frac{80}{100}$

8 

① $P(S|M') = ?$

نفرض $P(S|M') = P$

$P(S) = \frac{80}{100}$

8 $P(S) = P(M \cap S) + P(M' \cap S)$

8 $\frac{80}{100} = \frac{60}{100} \times \frac{70}{100} + \frac{40}{100} \times P$

$\frac{40}{100} P = \frac{80 - 42}{100}$

8 $\frac{40}{100} P = \frac{38}{100}$

8 $P = \frac{38}{40} = P(S|M')$

② $P(M \cup S) = ?$

8 $P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S)$

8 $= \frac{60}{100} + \frac{80}{100} - \frac{42}{100}$

4 $= \frac{98}{100}$

60

ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين

المسألة الأولى:

3 ① $A(3,0,0)$

3 $B(0,2,0)$

3 $C(0,0,1)$

3 $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$

3 $\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

غير مرتبطين خطياً لأن

3 مركباتهما غير متناسبة

$\frac{-3}{-3} \neq \frac{0}{1}$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظمياً على

3 المستوي (ABC) فيكون

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ ومنه

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

3 $\boxed{-3a + 2b = 0}$ (1)

و $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$ ومنه

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

3 $\boxed{-3a + c = 0}$ --(2)

3 نفرض $\boxed{a = 2}$ نجد

$-6 + 2b = 0$

3 ومنه $\boxed{b = 3}$

و $-6 + c = 0$

3 $\boxed{c = 6}$

2 وبالتالي $\vec{n}(2,3,6)$

ويمر بالنقطة $C(0,0,1)$

معادلته هي:

$2x + 3y + 6(z-1) = 0$

3 $(ABC): \boxed{2x + 3y + 6z - 6 = 0}$

(2) $(OH)\begin{cases} \vec{v} = \vec{n}_{(ABC)}(2,3,6) \\ O(0,0,0) \end{cases}$

3 3 3 $(OH):\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \quad : t \in \mathbb{R} \\ z = 6t \end{cases}$

إنّ إحداثيات النقطة H هي نقطة تقاطع المستقيم (OH) مع المستوي (ABC)

نعوض المعادلات الوسيطة للمستقيم (OH) في معادلة المستوي $(\bar{A}BC)$ فنجد:

3 $2(2t)+3(3t)+6(6t)-6=0$

$4t+9t+36t-6=0$

$49t=6$

3 $\boxed{t=\frac{6}{49}}$

نعوض

2 $\begin{cases} x = \frac{12}{49} \\ y = \frac{18}{49} \\ z = \frac{36}{49} \end{cases}$

3 $H\left(\frac{12}{49}, \frac{18}{49}, \frac{36}{49}\right)$

$dist(O, ABC) = OH$

3 $= \sqrt{\left(\frac{12}{49}\right)^2+\left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{36}{49}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{6^2 \times 2^2 + 6^2 \times 3^2 + 6^2 \cdot 6^2}{(49)^2}}$

$= \sqrt{\frac{6^2(4+9+36)}{(49)^2}}$

$= \sqrt{\frac{6^2}{49}}$

3 $\boxed{OH = \frac{6}{7}}$

(3)

3 $V(OABC) = \frac{1}{3} A(OAB) \cdot h$

3 $A(OAB) = \frac{1}{2}(3)(2) = 3$

3 $h = OC = 1$

3 $V(OABC) = \frac{1}{3}(3) \cdot 1 = 1$

نستنتج مساحة المثلث ABC حسب حجم رباعي الوجوه بطريقة ثانية

3 $V(OABC) = \frac{1}{3} A(ABC) \cdot h$

3 $h = OH = \frac{6}{7}$ حسب 2

$1 = \frac{1}{3} A(ABC) \cdot \frac{6}{7}$

3 $A(ABC) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

(4) المطلوب هو:

3 $A^2(ABC) = A^2(OAB) + A^2(OBC) + A^2(OAC)$

3 $\ell_1 = A^2(ABC) = \frac{49}{4}$

$\ell_2 = \frac{1}{4}(3)^2(2)^2 + \frac{1}{4}(2)^2(1)^2 + \frac{1}{4}(3)^2(1)^2$

$= \frac{36}{4} + \frac{4}{4} + \frac{9}{4}$

3 $= \frac{49}{4}$

3 $\ell_1 = \ell_2$ محقق

100

* إذا حسب الطالب بعد النقطة O عن المستوي ABC بطريقة أخرى ينال الدرجة المخصصة لهذه الخطوة ضمناً"

المسألة الثانية:

$f(x) = x \cdot e^{-x}$

① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ — 4

لأن: — 4
$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$ و

عند $+\infty$: $f(x) = \frac{x}{e^{x}}$ — 4

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ — 4

ومنه المستقيم $\boxed{y=0}$ مقارب أفقي لخط البياني منطبق (xx'). — 4

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot x$ — 4

$f'(x) = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) = 0$ عندما $1 - x = 0$ — 4

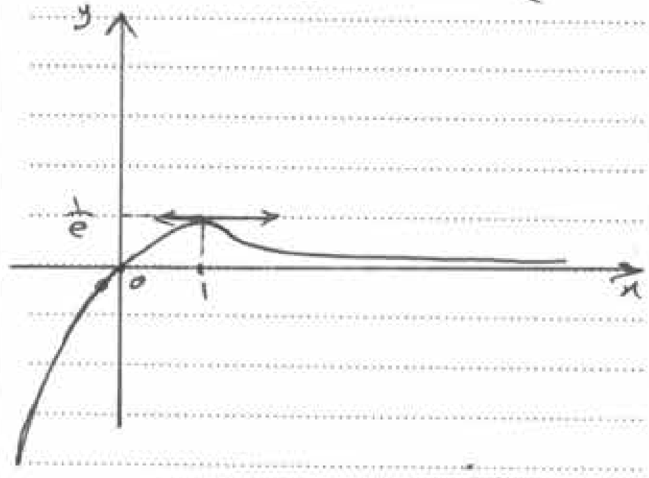
ومنه $\boxed{x=1}$ — 4

$f(1) = \frac{1}{e}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

4 4 4

$f(1) = \frac{1}{e}$ قيمة كبرى محلياً — 4



4

② $y' + y = e^{-x}$

لنعوض بـ $y = f(x)$ في المعادلة التفاضلية المفروضة.

4 $f'(x) + f(x) = e^{-x}(1-x) + x e^{-x}$

$= e^{-x} = ط_2$

4 محققة

وبالتالي $y = f(x)$ حل للمعادلة التفاضلية المفروضة.

③ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

a) لنثبت ذلك بالتدريج:
الخاصة المطلوب إثباتها هي:
2 $E(n)$: « $0 < u_n \leq 1$ »
ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n

2 (I) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن
$0 < u_0 = 1 \leq 1$ محققة

2 (II) لنفترض أن الخاصة $E(n)$
2 صحيحة ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$
2 $E(n+1)$: « $0 < u_{n+1} \leq 1$ »

2 لدينا فرضاً $0 < u_n \leq 1$

2 وبما أن f تابع متزايد تماماً على $]0,1]$

2 $f(0) < f(u_n) \leq f(1)$

$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{e} \leq 1$

2 فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$
فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

b) الخاصة المطلوب إثباتها هي :

E(n) : « $u_{n+1} \le u_n$ »

ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n.

I) الخاصة E(0) صحيحة لأن

2 $u_1 = \frac{1}{e} \le u_0 = 1$ محققة.

II) لنفترض أن الخاصة E(n) صحيحة

2 ولنثبت صحة الخاصة E(n+1)

E(n+1) : « $u_{n+2} \le u_{n+1}$ »

2 لدينا فرضاً : $u_{n+1} \le u_n$

ومنه لأن f متزايد تماماً على $[0,1]$ نجد

2 $f(u_{n+1}) \le f(u_n)$

2 $u_{n+2} \le u_{n+1}$

فالخاصة E(n+1) صحيحة اعتماداً على E(n)

فالخاصة E(n) صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

2 فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متناقصة.

4) $w_n = \ln u_n$

a) $u_n = w_n - w_{n+1}$

$\ell_2 = w_n - w_{n+1}$

2 $= \ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$

$= \ln(u_n) - \ln(u_n e^{-u_n})$

2 $= \ln(u_n) - (\ln u_n + \ln e^{-u_n})$

$= \ln u_n - \ln u_n - \ln e^{-u_n}$

2 $= -(-u_n) = u_n = \ell_1$

2 b) $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$S_n = (w_0 - w_1) + (w_1 - w_2) + \dots + (w_n - w_{n+1})$

2 $\boxed{S_n = w_0 - w_{n+1}}$

60

انتهت الأجوبة