أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية

السؤال الأول:

(1) f معرف على $]-\infty,0[\ \cup\ ]0,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow$ 3

$\boxed{y=-1}$ مستقيم مقارب أفقي 3

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3 \Rightarrow$ $\boxed{y=3}$ مستقيم 3+3

مقارب أفقي.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow$ 3

$\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي 3

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$ 3

(2) بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$ 3

و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ 3

فليس للخط C مستقيمات مقاربة مائلة 3

في جوار $+\infty$ أو $-\infty$.

(3) $f(]0,+\infty[) = [1,+\infty[$ 3

(4) $\lim_{x\to+\infty} (f(f(x)))$

نفرض $t = f(x)$

فيكون $f(f(x)) = f(t)$ 2

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$ 2

$\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to 3} f(t) = 1$ 3

40

السؤال الثاني:

$$Z = \frac{(-1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)^{5}}{1-i}$$

نفرض $w_1 = -1 + i\sqrt{3}$

4 $r = |w_1| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

4 $\cos\theta = \frac{-1}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\Big\}$ $\theta \in$ الربع الثاني ، $\theta = \frac{2\pi}{3}$

4 $\boxed{w_1 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

نفرض $w_2 = \sqrt{3} + i$

4 $r = |w_2| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

4 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2}$ $\Big\}$ $\theta \in$ الربع الأول ، $\theta = \frac{\pi}{6}$

4 $w_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

4 $\boxed{w_2^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{6}}}$

نفرض $w_3 = 1 - i$

4 $\boxed{w_3 = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

4 $$Z = \frac{2e^{\frac{2i\pi}{3}}\, 2^5 e^{i\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}$$

$$Z = \sqrt{2}\, 2^5 e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}$$

4 $\boxed{Z = 32\sqrt{2}\, e^{i\frac{21\pi}{12}}}$

40

20

السؤال الثالث:

$B(5,0,-10)$ و $A(1,-3,2)$

مركز الكرة هو منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

5 $I\left(\frac{5+1}{2}, \frac{0-3}{2}, \frac{-10+2}{2}\right)$

5 $\boxed{I\left(3, -\frac{3}{2}, -4\right)}$

5 (نصف قطر الكرة) $r = \frac{AB}{2}$

5 $AB = \sqrt{(5-1)^2+(0+3)^2+(-10-2)^2}$

5 $AB = \sqrt{16+9+144} = \sqrt{169}$

5 $AB = 13$

5 $\boxed{r = \frac{13}{2}}$

معادلة الكرة هي:

5 $\boxed{(x-3)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2+(z+4)^2 = \frac{169}{4}}$

40 **السؤال الرابع:**

$(\ln x)^2 - \ln x - 6 \leq 0$

4 المتراجحة معرفة عندما $x \in]0,+\infty[$

4 $(\ln x)^2 - \ln x - 6 = 0$

4 $(\ln x - 3)(\ln x + 2) = 0$

4 $\ln x - 3 = 0 \Rightarrow \ln x = 3$

4 $\boxed{x = e^3}$

$\ln x + 2 = 0 \Rightarrow \ln x = -2$

4 $\boxed{x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}}$

4	x	0	$\frac{1}{e^2}$	e^3	$+\infty$
4	$(\ln x)^2 - \ln x - 6$	‖	$+$ 0	$-$ 0	$+$
4	المتراجحة	‖		محققة	

4 $x \in \left[\frac{1}{e^2}, e^3\right]$

4 $S = \left[\frac{1}{e^2}, e^3\right]$

وهي مجموعة حلول المتراجحة المعروضة

40 **ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:**

التمرين الأول:

يكون العدد $\frac{i}{z+1}$ حقيقياً إذا وفقط إذا:

6 $\overline{\left(\frac{i}{z+1}\right)} = \frac{i}{z+1}$

6 $\frac{-i}{\bar{z}+1} = \frac{i}{z+1}$

6 $-i(z+1) = i(\bar{z}+1)$

6 $-iz - i = i\bar{z} + i$

$i(z+\bar{z}) + 2i = 0$

6 $i(2x) + 2i = 0$

6 $i(2x+2) = 0$

6 ومنه $2x+2=0$

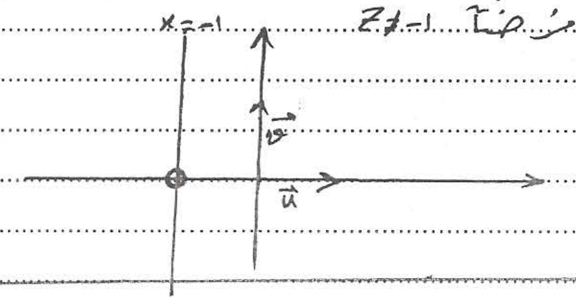
6 $\boxed{x=-1}$

مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل المستقيم

6 الذي معادلته $\boxed{x=-1}$ محذوف

6 منه النقطة $(-1,0)$ لأنه لدينا

مرفوض $z \neq -1$



60

التمرين الثاني :

$f(x)=\sqrt{x^2-1}+2x$

① نلاحظ أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

5 هي حالة عدم تعيين من شكل $-\infty+\infty$

لإزالتها :

5 $f(x)=\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}+2x$

5 $f(x)=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x$

5 علماً أن x في جوار $-\infty$ فإن $|x|=-x$

5 $f(x)=-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x$

5 $f(x)=\underbrace{x}_{-\infty}\left(-\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}+2\right)$

5 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

5 ② $f(x)-y_D=\sqrt{x^2-1}-x$

نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_D)$

5 هي حالة عدم تعيين من شكل $+\infty-\infty$

لإزالتها : نضرب بالمرافق ونقسم عليه

5 $f(x)-y_D=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$

5 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_D)=0$

5 ومنه فالمستقيم $D:\boxed{y=3x}$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

60 المجموع

التمرين الثالث :

10+10 • دستور Δ – التعويض – حساب $\Delta=1$

10+10 • $z_1=\frac{-(2i-1)+1}{2}=1-i$

10+10 / 60 $z_2=\frac{-(2i-1)-1}{2}=-i$

التمرين الرابع :

$f(x)=\frac{x^3-3x^2+2-\sin x}{x^2}$

4 ① $f(x)=x-3+\frac{2-\sin x}{x^2}$

4 $f(x)-y_D=\frac{2-\sin x}{x^2}$

4 $-1\le\sin x\le 1$ $\times -1$

4 $1\ge-\sin x\ge-1$

4 $3\ge 2-\sin x\ge 1$ $(+2)$

$\div x^2$

4 $\frac{3}{x^2}\ge\frac{2-\sin x}{x^2}\ge\frac{1}{x^2}$

علماً أن

4 $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ و

4 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد أن

4 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\sin x}{x^2}=0$

4 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_D)=0$

4 ومنه المستقيم $D: y=x-3$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

② لدراسة وضع C بالنسبة إلى D ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y_D=\frac{2-\sin x}{x^2}$

4 البسط: $3\ge 2-\sin x\ge 1$ (موجب تماماً)

4	x	$-\infty$ … 0	0 … $+\infty$
4	$f(x)-y_D$	$+$	$+$
4	الوضع النسبي	C يقع فوق D	C يقع فوق D

60

مسائل: حل كلاً من المسائل الآتية:

المسألة الأولى:

3×8 (1) $D(0,0,0)$ و $H(0,0,4)$

$C(4,0,0)$ و $G(4,0,4)$

$A(0,4,0)$ و $E(0,4,4)$

$B(4,4,0)$ و $F(4,4,4)$

3 (2) $J(1,0,0)$

3 $I(4,2,4)$

6 a) $\overrightarrow{HI}(4,2,0)$

6 $\overrightarrow{HJ}(1,0,-4)$

6 $\overrightarrow{HG}(4,0,0)$

4 b) نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{HJ}$ و $\overrightarrow{HG}$ يقعان في مستوٍ واحد هو $(DCGH)$

4 $H \in (DCGH)$ و

4 $I \notin (DCGH)$ ومنه $\overrightarrow{HI}$ لا يقع في المستوي

4 $DCGH$

4 فالأشعة $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ و $\overrightarrow{HG}$ لا تقع في مستوٍ واحد

طريقة ثانية: نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ غير مرتبطين خطياً

2 لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{1}{4} \neq \frac{0}{2}\right)$

لنبحث عن عددين حقيقيين α, β حيث

2 $\overrightarrow{HG} = \alpha\,\overrightarrow{HI} + \beta\,\overrightarrow{HJ}$

2 $$\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$$

2 2 2
$$\begin{cases} 4\alpha + \beta = 4 & (1) \\ 2\alpha = 0 & (2) \\ -4\beta = 0 & (3) \end{cases}$$

لنأخذ $\{(2),(3)\}$

2 من (2) نجد أن: $\alpha = 0$

2 من (3) نجد أن: $\beta = 0$

2 نتحقق بالتعويض في (3) $0+0=4$ غير محققة

2 فالأشعة $\overrightarrow{HG}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ غير مرتبطة خطياً

وهي لا تقع في مستوٍ واحد

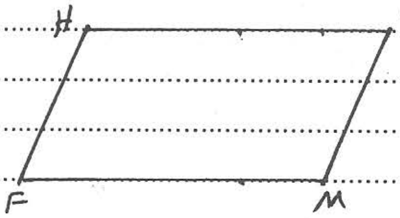
4 (3) $N(2x_E - x_C,\ 2y_E - y_C,\ 2z_E - z_C)$

4 $N(0-4,\ 8-0,\ 8-0)$

4 $\boxed{N(-4,8,8)}$

(4) يكون الشكل $HCMF$ متوازي أضلاع

إذا تحقق:



4 $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{HC}$

نفرض $M(x,y,z)$

4 4 $$\begin{pmatrix}x-4\\y-4\\z-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$$

4
$$\begin{cases} x-4=4 \Rightarrow x=8 \\ y-4=0 \Rightarrow y=4 \\ z-4=-4 \Rightarrow z=0 \end{cases}$$

4 $M(8,4,0)$

100

المسألة الثانية:

$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

3 (1) إثبات أن $x \in D_f$ فإن $-x \in D_f$

3 $x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

3 $-x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ محققة وضوحاً

3 الشرط (2): $f(-x) = -f(x)$

3 $f(-x) = \ln\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right)$

3 $= \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

3 $= \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-1}$

3 $= -\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -f(x)$

مما سبق الشرطان (1,2) محققان ومنه

3 f تابع فردي.

3 وخطه البياني متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات $O(0,0)$

(2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

3 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x+2} = 1$

3 ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{X\to 1} \ln X = 0$

3 ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب موازٍ لـ $x'x$ في جوار $-\infty$

3 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x+2} = 1$

ومنه

3 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{X\to 1} \ln X = 0$

3 $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب موازٍ لـ $x'x$ في جوار $+\infty$.

29

3 $\lim_{x\to(-2)^-} \frac{x-2}{x+2} = +\infty$

3 $\lim_{x\to(-2)^-} f(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$

3 ومنه $\boxed{x=-2}$ مستقيم مقارب شاقولي.

3 $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x+2} = 0$

3 ومنه $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{X\to 0} \ln X = -\infty$

3 ومنه $\boxed{x=2}$ مستقيم مقارب شاقولي.

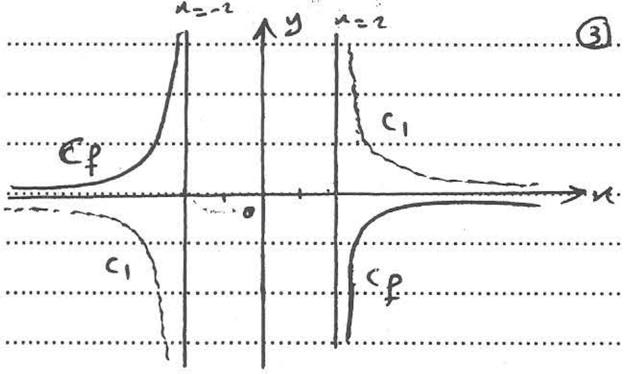
3 $f'(x) = \frac{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)'}{\frac{x-2}{x+2}}$

3 $f'(x) = \frac{4}{(x-2)(x+2)} > 0$

3	x	$-\infty$	-2 2	$+\infty$
3	$f'(x)$	$+$	‖	$+$
3	$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 0$

(3)

3 3 3 3



(4) $f_1(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = -\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$

3 $f_1(x) = -f(x)$

4 ومنه C_1 هو نظير C بالنسبة إلى $x'x$

100 انتهى السلم.