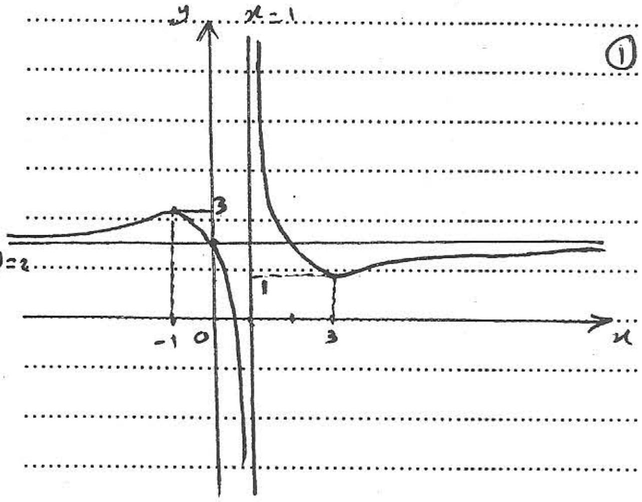
أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

①



5 + 5 + 5+

②

5 1. الجواب: b

5 2. الجواب: b

5 3. الجواب: a

5 4. الجواب: d

5 5. الجواب: a

40

السؤال الثاني:

$$Z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$$

بفرض $w_1 = 1 + i\sqrt{3}$

5 $w_1 = 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

بفرض $w_2 = 1 + i$

5 $w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

5 $Z = \frac{2}{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)}$

5 $Z = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$

5 $Z^{30} = (\sqrt{2})^{30}\, e^{i\left(\frac{30\pi}{12}\right)}$

5 $= 2^{15}\, e^{i\frac{5\pi}{2}}$

5 $= 2^{15}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 2^{15}\, i$

5 وهو تخيلي بحت

40

السؤال الثالث:

3 $\overrightarrow{AB}(2, 1, -8)$

3 $\overrightarrow{AC}(1, 6, 3)$

3 $\overrightarrow{AD}(1, -16, -25)$

3 نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{2}{1} \neq \frac{1}{6}\right)$

لنبحث عن عددين حقيقيين α و β يحققان:

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\, \overrightarrow{AB} + \beta\, \overrightarrow{AC}$$

3 $$\begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ -25 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3 3 3
$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1 & (1) \\ \alpha + 6\beta = -16 & (2) \\ -8\alpha + 3\beta = -25 & (3) \end{cases}$$

لنأخذ المعادلتين (2),(1)

3 $$\xrightarrow{\times -6} \begin{cases} -12\alpha - 6\beta = -6 \\ \alpha + 6\beta = -16 \end{cases}$$

بالجمع: $-11\alpha = -22$

3 $\boxed{\alpha = 2}$

نعوض في (1)

$4 + \beta = 1$

3 $\boxed{\beta = -3}$

نتحقق بالتعويض في (3)

3 $-8(2) + 3(-3) = -16 - 9 = -25$

محققة ومنه

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

2 فالأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً

2 فالنقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد

40

18

السؤال الرابع :

$\ln(2x+1)^2 = \ln x^2$

5 شرط الحل : $x^2 > 0$ وهذه محققة عندما

$x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

5 $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$

5 $(2x+1)^2 = x^2$

5 $|2x+1| = |x|$

5+5 $2x+1 = x$ ، $2x+1 = -x$

5+5 $\boxed{x=-1}$ مقبول ، $3x = -1$ ، $\boxed{x = -\frac{1}{3}}$ مقبول

$S = \{-1, -\frac{1}{3}\}$

40 ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية :

التمرين الأول :

$Z_1 = -3e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$Z_2 = 2-2i$

4 ① $Z_1 = -3\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})\right)$

4 $Z_1 = -3\left(+\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

4 $\boxed{Z_1 = \frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i}$

$Z_1 \cdot Z_2 = \left(\frac{-3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)(2-2i)$

4 $Z_1 \cdot Z_2 = -3 + 3i + 3\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}$

4 $\boxed{Z_1 \cdot Z_2 = (3\sqrt{3}-3) + i(3\sqrt{3}+3)}$

② $Z_1 = -3e^{-i\frac{\pi}{3}}$

4 $Z_1 = e^{i\pi} \cdot 3 e^{-i\frac{\pi}{3}}$

4 $Z_1 = 3e^{i(\pi - \frac{\pi}{3})}$

4 $\boxed{Z_1 = 3e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

$Z_2 = 2-2i$

$Z_2 = 2(1-i)$

4 $\boxed{Z_2 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

4 $Z_1 \cdot Z_2 = 6\sqrt{2}e^{i(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4})}$

4 $\boxed{Z_1 \cdot Z_2 = 6\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{12})}}$

③ المطابقة بين الشكل الأسي والجبري للعدد $Z_1 \cdot Z_2$ نستنتج أن

4 $6\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} = (3\sqrt{3}-3) + i(3\sqrt{3}+3)$

$e^{i\frac{5\pi}{12}} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}}i$

4 $\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}i$

ومنه

4 $\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$

4 $\boxed{\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$

60

١٩

التمرين الثاني :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف

على $\mathbb{R}^*$ بـ

$f(x) = \frac{x^2-2+\sin x}{x}$

4 $f(x) = x + \frac{-2+\sin x}{x}$

4 بفرض $\Delta : y = x$

4 $f(x) - y_\Delta = \frac{-2+\sin x}{x}$

4 $-1 \le \sin x \le 1$

4 $-3 \le -2+\sin x \le -1$

بما أن x في جوار $+\infty$ فباستطاعتنا التقسيم

على x لا تتغير جهة المتراجحة

4 $\frac{-3}{x} \le \frac{-2+\sin x}{x} \le -\frac{1}{x}$

4 بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{3}{x}\right) = 0$,

4 $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1)

نجد أن

4 $\lim_{x\to+\infty}\frac{-2+\sin x}{x} = 0$

أي

4 $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-y_\Delta\right) = 0$

4 ومنه فالمستقيم Δ الذي معادلته : $y = x$

مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

لدراسة وضع C بالنسبة إلى المستقيم Δ نوجد

$f(x) - y_\Delta = \frac{-2+\sin x}{x} \neq 0$

4 البسط : $-3 \le -2+\sin x \le -1$ (سالب تماماً)

4 x	$-\infty$	0	$+\infty$
4 $f(x)-y_\Delta$	+	||	−
4 الوضع النسبي	C يقع فوق Δ	||	C يقع تحت Δ

60

التمرين الثالث :

$(E) : z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$

4 (1) نعوض $z = 3$ في المعادلة (E)

4 $(3)^3 - 13(3)^2 + 59(3) - 87 =$

$= 27 - 117 + 177 - 87$

4 $= 104 - 104 = 0$

4 ومنه $z = 3$ حل للمعادلة (E)

لإيجاد الحلين الآخرين :

بما أن $z = 3$ حل للمعادلة (E) فكثير الحدود

يقبل القسمة على $(z-3)$

4
$$
\begin{array}{r|l}
z^3 - 13z^2 + 59z - 87 & z-3 \\
\mp z^3 \pm 3z^2 & z^2 - 10z + 29 \\
\hline
-10z^2 + 59z - 87 & \\
\pm 10z^2 \mp 30z & \\
\hline
29z - 87 & \\
\mp 29z \pm 87 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

4 $(z-3)(z^2 - 10z + 29) = 0$

$z^2 - 10z + 29 = 0$

4 $\Delta = 100 - 4(1)(29)$

$= 100 - 116 = -16 < 0$

المعادلة حلان في $\mathbb{C}$

4 $\sqrt{-\Delta} = \sqrt{16} = 4$

4 $z_2 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a} = \frac{10+4i}{2} = \boxed{5+2i}$

4 $z_3 = \overline{z_2} = \boxed{5-2i}$

② $z_A = 3 \longrightarrow A(3, 0)$

$z_B = 5-2i \longrightarrow B(5, -2)$

$z_C = 5+2i \longrightarrow C(5, 2)$

$AB = \sqrt{(5-3)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{4+4}$

4 $AB = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AC = \sqrt{(5-3)^2+(2-0)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

4 $BC = \sqrt{(5-5)^2+(2+2)^2} = 4$

4 نلاحظ أن $AB = AC$ فالمثلث متساوي الساقين

4 ونلاحظ أن $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$16 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$

$16 = 8 + 8$

4 $16 = 16$

حسب عكس فيثاغورث يجب أن المثلث ABC قائم في A

4 مما سبق نستنتج أنه ABC قائم في A ومتساوي الساقين.

60 التمرين الرابع:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1}, & x \neq 0 \\ m, & x = 0 \end{cases}$$

الحل: f مستمر على $\mathbb{R}^*$ وحتى يكون f

6 مستمراً على IR يجب أن يكون مستمراً عند (0)

فيجب أن نتحقق

6 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

6 $\boxed{f(0) = m}$

٢١

عندما يكون $x \neq 0$:

$f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1}$

نضرب بمرافق كل من البسط والمقام

6+6 $f(x) = \dfrac{1-\cos^2 x}{1+x^2-1} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{1+\cos x}$

6+6 $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{1+\cos x}$

6 $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{1+\cos x}$

6 $\lim_{x\to 0} f(x) = (1)^2 \cdot \left(\frac{2}{2}\right) = 1$

الشرط: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

6 $\boxed{1 = m}$ وهي قيمة m

التي تجعل f مستمراً على IR

ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

① لدينا فرضاً:

5 $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BD} + \frac{1}{3}\vec{BE}$

5 $3\vec{BK} = \vec{BD} + \vec{BE}$

5 $3(\vec{BA} + \vec{AK}) = \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{BA} + \vec{AE}$

5 $3\vec{BA} + 3\vec{AK} = 2\vec{BA} + \vec{AD} + \vec{AE}$

5 $3\vec{AK} = -3\vec{BA} + 2\vec{BA} + \vec{AD} + \vec{AE}$

5 $3\vec{AK} = -\vec{BA} + \vec{AD} + \vec{AE}$

5 $3\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$

5 ② إذن $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}$

5 $\boxed{\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}}$

③ وجدنا أن

5 $\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE}$

5 $\vec{AG} = 3\vec{AK}$

5 منه الشعاعان $\vec{AG}$ و $\vec{AK}$ مرتبطان خطياً

5 فالنقاط A و G و K تقع على استقامة واحدة

④ وجدنا أن

5 $\underbrace{\vec{AB} + \vec{AD}} + \vec{AE} = 3\vec{AK}$

5 $\vec{AC} + \vec{AE} = 3\vec{AK}$

5 $\vec{EG} + \vec{DH} = 3\vec{AK}$

5 $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{EG} + \frac{1}{3}\vec{DH}$

5 $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{EG} - \frac{1}{3}\vec{HD}$ (*)

5 نجد أن $\vec{HD}$ و $\vec{EG}$ غير مرتبطين خطياً

ومنه من العلاقة (*) نستنتج أن الأشعة

5 $\vec{AK}$ و $\vec{EG}$ و $\vec{HD}$ مرتبطة خطياً.

100

المسألة الثانية:

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x-5}{2x-1}\right)$$

5 ① $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = -\infty$

5 ومنه مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x = 5}$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-5}{2x-1} = \frac{1}{2}$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-5}{2x-1}\right) = \lim\limits_{X\to\frac{1}{2}} \ln X = \ln\frac{1}{2}$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

5 ② $f(x) - y_D = \ln\left(\frac{x-5}{2x-1}\right) + \ln 2$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - y_D\right) = \ln\frac{1}{2} + \ln 2$

5 $= -\ln 2 + \ln 2 = 0$

5 ومنه المستقيم $D: y = x - \ln 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

5 لدراسة وضع C بالنسبة إلى D ندرس إشارة الفرق

5 $f(x) - y_D = \ln\left(\frac{x-5}{2x-1}\right) + \ln 2$

5 $= \ln\left(\frac{2x-10}{2x-1}\right)$

5 $x \in]5,+\infty[$ نجد أن $2x-10 < 2x-1$ ومنه

5 $0 < \frac{2x-10}{2x-1} < 1$

5 وبالتالي $\ln\left(\frac{2x-10}{2x-1}\right) < 0$

5 ومنه C يقع تحت D دوماً $f(x) - y_D < 0$

③ f معرف ومستمر واشتقاقي على $]5,+\infty[$

5 $f'(x) = 1 + \dfrac{\left(\frac{x-5}{2x-1}\right)'}{\frac{x-5}{2x-1}}$

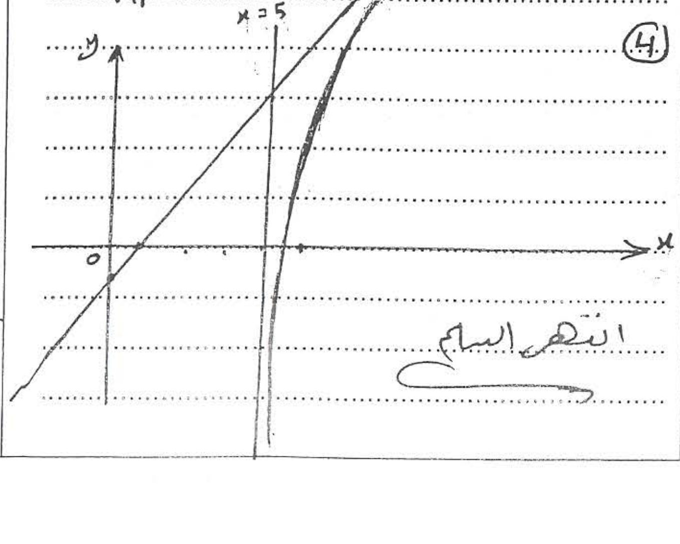
5 $f'(x) = 1 + \dfrac{9}{(x-5)(2x-1)} > 0$

x	5		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

5
5
5

④

5 + 5



انتهى السلم

100