أولاً: أجيبي عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول:

4 (1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

4 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4 ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي

(2) مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<0$ هي

4 $x\in\,]-\infty,+\infty[\setminus \{2,-2\}$

(3) 4 $f(2)=-2$

4 $f'(2)=0$

(4) 4 $f(]-2,2]) = [-2,0[$

(5) حساب $\lim_{x\to2}(f(f(x)))$

نفرض $t=f(x)$

4 فيكون $f(f(x))=f(t)$

4 $\lim_{x\to2} f(x) = -2$

4 $\lim_{x\to2}(f(f(x))) = \lim_{t\to-2} f(t) = 0$

40

السؤال الثاني:

$Z=(1+i\sqrt{3})^4 \cdot (\sqrt{3}+i)^5$

نفرض $w_1 = 1+i\sqrt{3}$

3 $r=|w_1|=\sqrt{1+3}=2$

3 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\theta \in$ (ر ١) ، $\theta = \frac{\pi}{3}$

3 $w_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

3 $w_1^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}} = 16e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$w_2 = \sqrt{3}+i$

3 $r=|w_2|=\sqrt{3+1}=2$

3 $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $\theta \in$ (ر ١) ، $\theta = \frac{\pi}{6}$

3 $w_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

3 $w_2^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{6}} = 32e^{i\frac{5\pi}{6}}$

3 $Z=(32\times16)\,e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}$

3 $Z = 512\,e^{i\left(\frac{13\pi}{6}\right)}$

3 $Z = 512\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

2 $Z = 512\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

3 $Z = 512\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

2 $\boxed{Z = 256\sqrt{3} + 256i}$

40

السؤال الثالث:

$E(0,0,1)$ ، $A(0,0,0)$

$F(1,0,1)$ ، $B(1,0,0)$

$G(1,1,1)$ ، $C(1,1,0)$

$H(0,1,1)$ ، $D(0,1,0)$

3 I منتصف $[BG]$ ومنه $I(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$\vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AH}$

نفرض $J(x,y,z)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x=0$ ، $y=\frac{1}{3}$ ، $z=\frac{1}{3}$

3 $\boxed{J(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3})}$

11

3 $\overrightarrow{AJ}\left(0 , \frac{1}{3} , \frac{1}{3}\right)$

3 $\overrightarrow{AF}\left(1 , 0 , 1\right)$

3 $\overrightarrow{DI}\left(1 , -\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\right)$

2 نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AJ}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

$\left(\frac{0}{1} \neq \frac{\frac{1}{3}}{1}\right)$

لنثبت أن يوجد عددين حقيقيين α , β بحيث:

$\overrightarrow{DI} = \alpha\, \overrightarrow{AF} + \beta\, \overrightarrow{AJ}$

3 $$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2, 2, 2 $$\begin{cases} \alpha = 1 & (1) \\ \frac{1}{3}\beta = -\frac{1}{2} & (2) \\ \alpha + \frac{1}{3}\beta = \frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

3 من (1) نجد $\boxed{\alpha = 1}$

3 من (2) نجد أن $\boxed{\beta = -\frac{3}{2}}$

نتحقق بالتعويض في (3) فنجد

3 $1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ محققة

ومنه

3 $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AF} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AJ}$

نحن بهذه نستنتج أن الأشعة

2 $\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AJ}$ مرتبطة خطياً

40

طريقة ثانية: بدون معلم:

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

$= \overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{AJ}\right)$

$\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AF} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AJ}$

12

السؤال الرابع:

$\ln(4x-1) - \ln 4 = \ln(x^2-1)$

نوجد مجموعة تعريف المعادلة أولاً:

4 $4x-1 > 0$ و $x^2-1 > 0$

$x > \frac{1}{4}$ و $x \in \left]-\infty , -1\right[\cup \left]1 , +\infty\right[$

4 $x \in \left]\frac{1}{4} , +\infty\right[\cap \left(\left]-\infty , -1\right[\cup \left]1 , +\infty\right[\right)$

4 $x \in \left]1 , +\infty\right[$

$D_f = \left]1 , +\infty\right[$

4 $\ln\left(\frac{4x-1}{4}\right) = \ln(x^2-1)$

4 $\frac{4x-1}{4} = x^2-1$

4 $4x-1 = 4x^2-4$

$4x^2 - 4x - 3 = 0$

$\Delta = 16 - 4(4)(-3)$

4 $= 16 + 48 = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

4 $x_1 = \frac{4+8}{2(4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \in \left]1 , +\infty\right[$ مقبول

4 $x_2 = \frac{4-8}{2(4)} = -\frac{1}{2} \notin \left]1 , +\infty\right[$ مرفوض

4 ومنه $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

40

السؤال الخامس:

يكون $\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}$ تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا:

8 كان مرافقه يساوي معاكسه أي:

8 $\overline{\left(\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}\right)} = -\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}$ لنثبت ذلك

8 $\ell_1 = \overline{\left(\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}\right)} = \frac{\bar{w} z - \bar{z}}{-i\bar{w} + i}$

4+4 $= \frac{\frac{1}{w} z - \bar{z}}{-i\frac{1}{w} + i} = \frac{z - w\bar{z}}{-i + iw}$

4 $= -\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}$

4 ومنه العدد المفروض تخيلي بحت

40

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية:

التمرين الأول:

$f(x) = \sqrt{x^2-4x+7}$

5 ① $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4x+7) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$

5 ② $x^2-4x+7 = x^2-4x+4+3$
$= (x-2)^2+3$

5 $f(x) = \sqrt{(x-2)^2+3}$

5 ③ نفرض $D: y = x-2$

5 $f(x)-y_D = \sqrt{(x-2)^2+3} - (x-2)$

نضرب بالمرافق ونقسم عليه

5 $f(x)-y_D = \dfrac{3}{\sqrt{(x-2)^2+3}+(x-2)}$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-y_D) = 0$

5 ومنه $D: \boxed{y = x-2}$ مستقيم مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

لدراسة وضع C بالنسبة إلى D ندرس إشارة الفرق:

$f(x)-y_D = \sqrt{(x-2)^2+3} - (x-2)$

5 نفرض $X = (x-2)$

$f(x)-y_D = \sqrt{X^2+3} - X > 0$

5 لأن $\sqrt{X^2+3} > X$

5 ومنه C يقع فوق D دوماً

60

التمرين الثاني:

أولاً:

4 $|f(x)+2| \leq \dfrac{E(x)}{x^2}$

4 نلاحظ أن: $|f(x)-(-2)| \leq g(x)$

4 حيث $g(x) = \dfrac{E(x)}{x^2}$

4+4 $x-1 < E(x) \leq x$

$\div x^2$

4 $\dfrac{x-1}{x^2} < \dfrac{E(x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{x}$

4 وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2} = 0$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

باستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد أن:

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{E(x)}{x^2} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

ومنه استناداً إلى مبرهنة الإحاطة (2)

نجد أن

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

ثانياً:

نفرض $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

4 $f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

4 نفرض $t = h(x) = \dfrac{1}{x}$

4 فيكون $f(x) = \dfrac{\sin t}{t}$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$

60

١٣

التمرين الثالث :

$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3}+i)z^2 + 4(1+i\sqrt{3})z - 8i$

① $P(2i) = (2i)^3 - 2(\sqrt{3}+i)(2i)^2 + 4(1+i\sqrt{3})(2i) - 8i$ 4

$= -8i + 8\sqrt{3} + 8i + 8i - 8\sqrt{3} - 8i$

$= 0$ 4

② $P(z) = (z-2i)(z^2+az+b)$

$P(z) = z^3 + (a-2i)z^2 + (b-2ia)z - 2ib$ 4

بالمطابقة نجد

$$\begin{cases} a-2i = -2(\sqrt{3}+i) & (1) \\ b-2ia = 4(1+i\sqrt{3}) & (2) \\ -2ib = -8i & (3) \end{cases}$$ 4 4 4

من (1) نجد أن $\boxed{a = -2\sqrt{3}}$ 4

نعوض في (2)

$b - 2i(-2\sqrt{3}) = 4 + 4i\sqrt{3}$ 4

$\boxed{b = 4}$

نتحقق بالتعويض في (3) فنجد

$-2i(4) = -8i$ محققة 4

$P(z) = (z-2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$

③ $P(z) = 0$

$(z-2i)(z^2-2\sqrt{3}z+4) = 0$ 4

إما $\boxed{z = 2i}$ 4

أو $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$

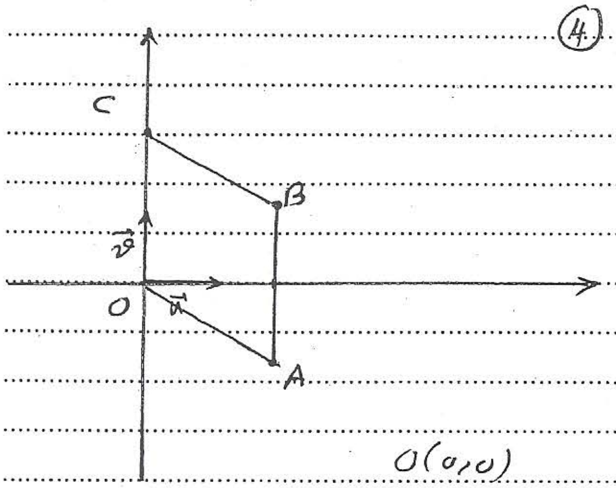
$\Delta = 12 - 4(1)(4) = -4 < 0$ 4

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{4} = 2$

$z_1 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{2} = \boxed{\sqrt{3}+i}$ 4

$z_2 = \overline{z_1} = \boxed{\sqrt{3}-i}$ 4

④



$O(0,0)$

$A(\sqrt{3},-1)$ 4

$B(\sqrt{3},1)$ 4

$C(0,2)$ 4

4 $\boxed{\overrightarrow{OA}(\sqrt{3},-1)}$ 4

4 $\boxed{\overrightarrow{CB}(\sqrt{3},-1)}$

نلاحظ أن $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$ 4

4 فالشكل OABC متوازي أضلاع

4 $OA = \sqrt{3+1} = 2$ 4

$OC = 2$

4 فأصبح الشكل OABC متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان فهو معين.

4

80 طريقة (2): يمكن أن نثبت بأنه متوازي أضلاع قطراه متعامدان.

طريقة (3): يمكن أن نثبت بأن أضلاعه متساوية

١٤

ثانياً: حل كلاً من المسائل الآتية:

المسألة الأولى:

(1) $(A; \frac{1}{4}\vec{AB}, \frac{1}{2}\vec{AD}, \frac{1}{3}\vec{AE})$

$A(0,0,0)$, $E(0,0,3)$

$B(4,0,0)$, $F(4,0,3)$ 8×3

$D(0,2,0)$, $H(0,2,3)$

$C(4,2,0)$, $G(4,2,3)$

(2) لنفرض K نقطة من المستقيم (AB)

ومنه K إحداثياتها من الشكل

$K(x,0,0)$ 4

$KH = KB$ 4

$KH^2 = KB^2$

$(x-0)^2+(0-2)^2+(0-3)^2 = (x-4)^2+0+0$ 4

$x^2+4+9 = x^2-8x+16$ 4

$8x = 3$

$\boxed{x = \frac{3}{8}}$ 4

وهي نقطة $K(\frac{3}{8},0,0)$ 4

من المستقيم (AB) متساوية البعد عن

النقطتين B , H

(3) $I\left(\frac{x_E+x_B+x_G}{3}, \frac{y_E+y_B+y_G}{3}, \frac{z_E+z_B+z_G}{3}\right)$ 4

$I\left(\frac{0+4+4}{3}, \frac{0+0+2}{3}, \frac{3+0+3}{3}\right)$ 4

$I(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 2)$ 4

$\vec{IF}(\frac{4}{3}, \frac{-2}{3}, 1)$ 4

$\vec{DF}(4, -2, 3)$ 4

نلاحظ أن:

$\vec{DF} = 3\vec{IF}$ 4

فالشعاعان $\vec{DF}$ و $\vec{IF}$ مرتبطان خطياً 4

فالنقاط I و D و F تقع على استقامة 4

واحدة. ١٥

5 (4) مركز الكرة $F(4,0,3)$

5 $r = DF = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$

معادلة الكرة هي:

10 $\boxed{(x-4)^2+y^2+(z-3)^2 = 29}$

100

المسألة الثانية:

$f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$

5 (1) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

5 ومنه مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=0}$

5 عند $+\infty$: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$

5 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

5 ومنه مستقيم مقارب أفقي $\boxed{y=0}$

(2) f معرف ومستمر ومشتق على $]0,+\infty[$

5 $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - 1(1+\ln x)}{x^2}$

5 $f'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$

5 عندما $f'(x)=0$ ومنه $-\ln x = 0$

5 $\boxed{x=1}$, $f(1) = 1$

5 5 5

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

(3) لنوجد نقطة تقاطع C_f مع محور الفواصل

5 $f(x) = 0 \Rightarrow$

$1+\ln x = 0$

5 $\ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

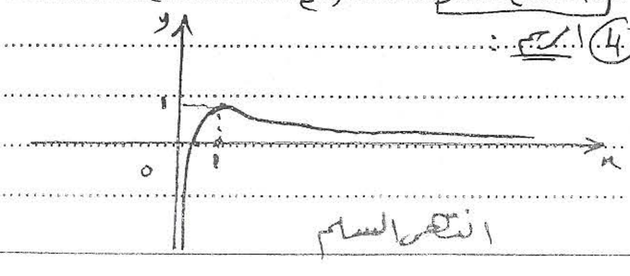
5 $(\frac{1}{e}, 0)$

5 $f'(\frac{1}{e}) = \frac{-\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} = e$

5 $y = f'(\frac{1}{e})(x-\frac{1}{e}) + f(\frac{1}{e})$

5 $y = e(x-\frac{1}{e}) \Rightarrow \boxed{y = ex-1}$

5+5 (4) الرسم:



100

انتهى السلم