أولاً: أجيبي عن الأسئلة الخمسة الآتية:

السؤال الأول:

(1) f معرف على $]-1,+\infty[\cup]-\infty,-1[$

3 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

3 ومنه $\boxed{y=-1}$ مستقيم مقارب أفقي

3 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$

3 $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي

3 $\lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -5$

3 $\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب

3 شاقولي لخط البياني.

3 (2) عيّنت $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

3 و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3 فليس للخط C مستقيمات مقاربة مائلة بجوار $-\infty$ أو $+\infty$

(3) مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 2$ هي

3+3 $x \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$

(4) بما أن f متناقص تماماً على $]-\infty,-1[$

$-3 < -2$

4 ومنه $f(-3) > f(-2)$

40

السؤال الثاني:

يكون w حقيقياً إذا وفقط إذا كان

4 $\overline{w} = w$ ومنه

$$\overline{\left(\frac{z+i}{\bar{z}+i}\right)} = \frac{z+i}{\bar{z}+i}$$

4 $$\frac{\bar{z}-i}{z-i} = \frac{z+i}{\bar{z}+i}$$

4 $(\bar{z}-i)(\bar{z}+i) = (z-i)(z+i)$

4 $\bar{z}^2 + 1 = z^2 + 1$

$\bar{z}^2 = z^2$

4 إما $\bar{z} = z$

4 ومنه z حقيقي أي M(z) تمثل xx'

4 أو $\bar{z} = -z$

ومنه z تخيلي بحت أي M(z) تمثل yy'

4 محذوف منه النقطة (0,1) لأنه لدينا فرضاً $z \neq i$

محاسبه نستنتج أن:

M(z) تمثل اجتماع محوري

4 الإحداثيات xx' , yy'

4 محذوفاً منه النقطة (0,1).

40

أو بطريقة ثانية:

$\bar{z}^2 = z^2$

$z^2 - \bar{z}^2 = 0$

$(z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0$

$2yi$ أو $2x = 0$

$4xyi = 0$

ومنه $xy = 0$

إما $\boxed{x=0}$ وهو يمثل (yy')

أو $\boxed{y=0}$ وهو يمثل (xx')

محذوف النقطة (0,1).

السؤال الثالث:

$(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$

3 ومنه $A(0,0,0)$

3 $B(1,0,0)$

3 $C(0,1,0)$

3 $D(0,0,1)$

3 $I(\frac{1}{3},0,0)$

3 $J(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$

لدينا: $[DJ]$ متوسط في المثلث DBC

و $\vec{JG} = \frac{1}{3}\vec{JD}$

G مركز ثقل المثلث DBC

ومنه

$G\left(\frac{0+0+1}{3}, \frac{0+1+0}{3}, \frac{1+0+0}{3}\right)$

3 $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3 $\vec{IG}\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3 $\vec{AC}(0,1,0)$

3 $\vec{AD}(0,0,1)$

نلاحظ أنّ الشعاعين $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$

3 غير مرتبطين خطياً لأنه لا ينتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي

3 و $\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AD}$

حسب ما سبق نستنتج أنّ

2 الأشعة $\vec{IG}$ و $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$

مرتبطة خطياً

2 ومنه نستنتج أنّ المستقيم (IG) يوازي المستوي (ACD)

40 ملاحظة: الحل بدون معلم: $\vec{IG} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DG}$

$\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{DJ}$

$\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{BA} + \vec{AD} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{DB} + \vec{DC})\right)$

$\vec{IG} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{DB}) + \vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{BC}$

$\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{DA} + \vec{AD} + \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{AC})$

$\vec{IG} = \frac{2}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{DA} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

$\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

٤

السؤال الرابع:

(1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \ln x + \ln y = 0 \end{cases}$

3 حلول المعادلتين معرّفتين عندما $x > 0$، $y > 0$

3 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ \ln(x \cdot y) = 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x y = 1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 & (1) \\ x^2 y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

3 من (1) نجد أنّ $y^2 = 2 - x^2$ نعوض

في (2)

3 $x^2(2 - x^2) = 1$

$2x^2 - x^4 = 1$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

$(x^2 - 1)^2 = 0$

3 $x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

3 إما $\boxed{x = 1}$ مقبول

3 أو $x = -1$ مرفوض

عندما $x = 1$ بالتعويض نجد $y = 1$

فالحل المشترك هو

3 $S = \{(1,1)\}$

(2) $\ln x + \ln y = 0$

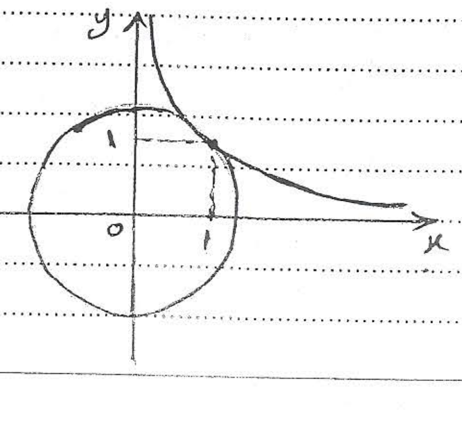
3 $y > 0$ ، $x > 0$

$\ln xy = 0$

$\ln(xy) = \ln 1$

3 $xy = 1 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{x}}$

وهو قطع زائد مرسوم في الربع الأول فقط



+2

0

السؤال الخامس:

$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

3 (1) $r = |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

3 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta \in]-\pi, \pi]$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

3 $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$

3 $z^{2020} = e^{i\left(\frac{2020\pi}{3}\right)}$

$$2020 \div 3 = 673 \quad (2020 - 18 = 22,\ 22 - 21 = 10,\ 10 - 9 = 1)$$

$\frac{2020\pi}{3} = 673\pi + \frac{\pi}{3} = 672\pi + \pi + \frac{\pi}{3}$

3 $z^{2020} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

3 $= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

3+3 $z + z^{2020} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = 0$

(2) $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} =$

5 $e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\pi} + e^{-i\frac{4\pi}{3}} + e^{-i\frac{5\pi}{3}}$

4 $= e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\pi} + e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

3 $= \left(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) + e^{i\pi}$

2 $= 2\cos\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{2\pi}{3} - 1$

2 $= 2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -1$

40

0

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية:

التمرين الأول:

$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 2\cos\sqrt{x} - 2}{x}$

(1) نستنتج أن $\lim_{x\to 0} f(x)$ بداية

عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ نكتب

4 $f(x) = -2x + 1 + \frac{2\cos\sqrt{x} - 2}{x}$

4 $= -2x + 1 - 2\left(\frac{1 - \cos\sqrt{x}}{x}\right)$

4 $= -2x + 1 - 2\,\frac{2\sin^2\frac{\sqrt{x}}{2}}{x}$

4 $= -2x + 1 - 4\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sqrt{x}}\right)^2$

4 $= -2x + 1 - 4\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{x}}{2}}{2\,\frac{\sqrt{x}}{2}}\right)^2 \to 1$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 - 4\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

4 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

(2) إثبات أن المستقيم $D: y = -2x + 1$ مقارب مائل

$f(x) = -2x + 1 + \frac{2\cos\sqrt{x} - 2}{x}$

4 $f(x) - y_D = \frac{2\cos\sqrt{x} - 2}{x}$

4 $-1 \le \cos\sqrt{x} \le 1$ $\times 2$

4 $-2 \le 2\cos\sqrt{x} \le 2$ -2

4 $-4 \le 2\cos\sqrt{x} - 2 \le 0$

4 $-\frac{4}{x} \le \frac{2\cos\sqrt{x} - 2}{x} \le 0$

4 عندئذ $\lim_{x\to +\infty}\left(-\frac{4}{x}\right) = 0$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نكتب:

4 $\lim_{x\to +\infty} \frac{2\cos\sqrt{x} - 2}{x} = 0$

4 ومنه $\lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - y_D\right) = 0$

4 وبالتالي $D: y = -2x + 1$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

50

التمرين الثاني:

$$f(x) = \frac{3+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

(1) نلاحظ أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ هي

حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ وإزالتها

4 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\left(\frac{3}{\sqrt{x}} + 1\right)}{2\sqrt{x}}$

4 $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{x}} + 1\right)$, $\frac{3}{\sqrt{x}} \to 0$

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$f(x) \in]0.4, 0.6[$

4 هذا يعني $|f(x) -$ نهاية$| <$ نصف طول المجال

4 $|f(x) - \frac{1}{2}| < 0.1$

4 $\left|\frac{3+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}$

4 $\left|\frac{3+\sqrt{x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right| < \frac{1}{10}$

4 $\frac{3}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{10}$

4 $\frac{2\sqrt{x}}{3} > 10$

$2\sqrt{x} > 30$

$\sqrt{x} > 15$

4 $\boxed{x > 225}$

4 ومنه أصغر عدد أكبر منه $\boxed{A = 225}$

(2) حساب $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(f(x))$

4 نفرض $t = f(x)$

4 فيكون $f(f(x)) = f(t)$

4 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

4 $\lim\limits_{x \to 0} f(f(x)) = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \frac{1}{2}$

60

التمرين الثالث:

$$Z^4 - 3Z^3 + \frac{9}{2}Z^2 - 3Z + 1 = 0$$

3 (1) $(1+i)^4 - 3(1+i)^3 + \frac{9}{2}(1+i)^2 - 3(1+i) + 1 = 0$

3 $(2i)^2 - 3(2i)(1+i) + \frac{9}{2}(2i) - 3 - 3i + 1 = 0$

3 $-4 - 6i + 6 + 9i - 3 - 3i + 1 = 0$

3 ومنه $(1+i)$ جذر للمعادلة (E).

(2) عبارة أن Z_0 جذر للمعادلة (E) فهو يحقق المعادلة

3 $Z_0^4 - 3Z_0^3 + \frac{9}{2}Z_0^2 - 3Z_0 + 1 = 0$

نأخذ مرافق الطرفين

3 $\overline{Z_0}^4 - 3\overline{Z_0}^3 + \frac{9}{2}\overline{Z_0}^2 - 3\overline{Z_0} + 1 = 0$

3 ومنه $\overline{Z_0}$ جذر للمعادلة (E).

(3) عبارة أن u_0 جذر للمعادلة (E) فهو يحقق المعادلة (E)

3 $u_0^4 - 3u_0^3 + \frac{9}{2}u_0^2 - 3u_0 + 1 = 0$

لنتحقق أن $\frac{1}{u_0}$ جذر للمعادلة (E)

3 $\left(\frac{1}{u_0}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{u_0}\right)^3 + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{u_0}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{u_0}\right) + 1 =$

3 $\frac{1}{u_0^4} + \frac{3}{u_0^3} + \frac{9}{2u_0^2} - \frac{3}{u_0} + 1 =$

3 $\frac{1 + 3u_0 + \frac{9}{2}u_0^2 - 3u_0^3 + u_0^4}{u_0^4} =$

3 $\frac{0}{u_0^4} = 0$

ومنه $\frac{1}{u_0}$ جذر للمعادلة (E)

(4) بما أن $1+i$ جذر للمعادلة (E)

3 فإن $\overline{(1+i)} = 1-i$ جذر للمعادلة

وكذلك بما أن $1+i$ جذر للمعادلة (E)

3 حسب الطلب (3) يكون $\frac{1}{1+i}$ جذراً أيضاً للمعادلة (E)

3 $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

أي $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ جذر للمعادلة (E)

3 وكذلك $\overline{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ جذر للمعادلة (E)

ومنه حلول المعادلة (E) هي:

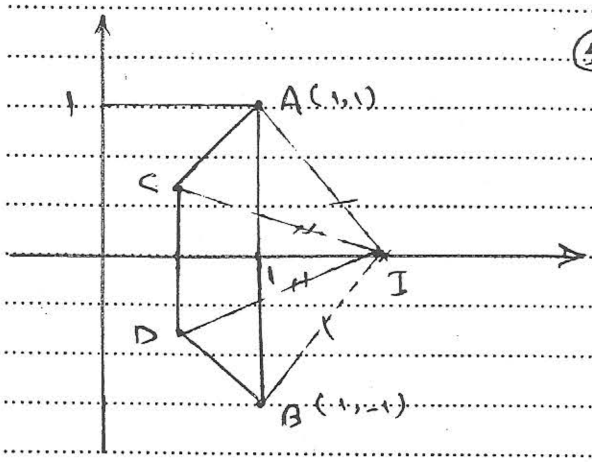
$z_1 = 1+i$

$z_2 = 1-i$

$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

(5)



3 نلاحظ أنّ B نظيرة A بالنسبة إلى $x'x$

3 و D نظيرة C بالنسبة إلى $x'x$ $\Leftarrow$

3 $AC = DB$ (لأن التناظر يحافظ على الأطوال)

3 $(AB) // (CD)$ (لأنهما عموديان على مستقيم واحد)

3 فالشكل ABDC شبه منحرف متساوي الساقين

3 فهو رباعي دائري

أي A ، B ، C ، D تقع على دائرة واحدة

3 مركز هذه الدائرة I يقع على محور التناظر بينهما أي يقع على $x'x$ فإحداثياته من الشكل $I(x,0)$

3 لتعيين x نضع $IA = IC$

ومنه $IA^2 = IC^2$

3 $(x-1)^2+(0-1)^2 = (x-\frac{1}{2})^2+(0-\frac{1}{2})^2$

$x^2-2x+1+1 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3 ومنه مركز الدائرة $I(\frac{3}{2}, 0)$

ونصف قطر الدائرة:

2 $r = IA = \sqrt{(\frac{3}{2}-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

80

ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

3 (1) $I(2,0,0)$

3 $J(0,2,0)$

M منتصف $[EC]$

3 $E(0,0,4)$ ، $C(4,4,0)$

3 ومنه $M(2,2,2)$

3 (2) $IM = \sqrt{(2-2)^2+(2-0)^2+(2-0)^2}$

$IM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

3 $JM = \sqrt{(2-0)^2+(2-2)^2+(2-0)^2}$

$JM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

3 $IJ = \sqrt{(2-0)^2+(0-2)^2+(0-0)^2}$

$IJ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

نلاحظ أن $IM = JM = IJ = 2\sqrt{2}$

3 فالمثلث IJM متساوي الأضلاع

(3) $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[EC]$

ومنه $ME = MC$

3 $ME^2 = MC^2$

3 $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-4)^2 = (x-4)^2+(y-4)^2+z^2$

3 $x^2+y^2+z^2-8z+16 = x^2-8x+16+y^2-8y+16+z^2$

$8x+8y-8z-16=0 \quad \div 8$

3 $\boxed{x+y-z-2=0}$

من الواضح أن M تقع على المستوي المحوري للقطعة $[EC]$

3 كونها منتصف $[EC]$

لنتحقق من النقطة $I(2,0,0)$

3 $2+0-0-2=0$

$0=0$

3 محققة ومنه I تقع على المستوي المحوري للقطعة $[EC]$