وثق : أجيبي عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

① f ليس اشتقاقياً عند $x=1$ — 4

لأن المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها (1) عمودي — 4

② $f(2)=2$ — 4

أ) $f'(4)$ تعني هندسياً ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 4

ونلاحظ أن الخط C يمر بالنقطتين $(4,0)$ و $(3,2)$

$f'(4) = \dfrac{\text{فرق العينات}}{\text{فرق السينات}}$ — 4

$= \dfrac{2-0}{3-4} = -2$ — 4

$f(4)=0$ — 4

و $f'(2)=0$ (لأن المماس أفقي) — 4

③ $y = f'(4)(x-4)+f(4)$ — 4

$\begin{cases} f'(4) = -2 \\ f(4)=0 \end{cases}$

$y = -2(x-4)+0$

$\boxed{y=-2x+8}$ — 4

④ $f(x)>0$ و يتحقق عندما يكون

وهذا محقق عندما $x\in\,]1,4[$ — 4

⑤

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	2	↘	$-\infty$

4

4

50

السؤال الثاني :

10 $z_{A'} - z_B = e^{i\theta}(z_A - z_B)$

10 $z_{A'} - (1-i) = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left[(2+i)-(1-i)\right]$

10 $z_{A'} -1+i = e^{-i\frac{\pi}{3}}(1+2i)$

$z_{A'} -1+i = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(1+2i)$

10 $z_{A'} -1+i = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+2i)$

$z_{A'} -1+i = \left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)+i\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10 $z_{A'} = \left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

50

السؤال الثالث :

4 ① $\vec{AB}(2,4,6)$

4 $\vec{AC}(8,2,-4)$

$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (2)(8)+(4)(2)+(6)(-4)$

4 $= 16+8-24$

$= 24-24=0$

4 ومنه $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ متعامدان

فالمثلث ABC قائم في A .

4 ② I منتصف $[BC]$

$I\left(\frac{9+3}{2}, \frac{7+9}{2}, \frac{-7+3}{2}\right)$

4 $I(6, 8, -2)$

4 $\vec{AI}(5, 3, 1)$

4 $\vec{AB}\cdot\vec{AI} = (2)(5)+(4)(3)+6(1)$

$= 10+12+6 = 28$

4 $\vec{AB}\cdot\vec{AI} = \|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AI}\|\cos(B\hat{A}I)$

4 $28 = \sqrt{4+16+36}\cdot\sqrt{25+9+1}\cos(B\hat{A}I)$

4 $28 = \sqrt{56}\cdot\sqrt{35}\cos(B\hat{A}I)$

$28 = \sqrt{4 \times 7 \times 2 \times 7 \times 5}\ \cos B\hat{A}I$ 4

$28 = 7 \times 2\sqrt{10}\ \cos B\hat{A}I$ 4

$2 = \sqrt{10}\ \cos B\hat{A}I$ 2

$\boxed{\cos B\hat{A}I = \frac{2}{\sqrt{10}}}$

50

السؤال الرابع:

$(e^x - 1).(4 - e^x) \geq 0$ 6

$(e^x - 1).(4 - e^x) = 0$ 6

إما $e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1$ 6

ومنه $\boxed{x = 0}$ 6

أو $4 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 4$ 6

$\boxed{x = \ln 4}$

x	$-\infty$	0	$\ln 4$	$+\infty$
$(e^x-1).(4-e^x)$	$-$	$0 + 0$		$-$
المتراجحة	~~~~	محققة	~~~~	

2 6 6

$\boxed{x \in [0, \ln 4]}$ 6

50

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية:

التمرين الأول:

1. $A(0,0,0)$ و $E(0,0,1)$ 3+3

$B(1,0,0)$ و $F(1,0,1)$ 3+3

$C(1,1,0)$ و $G(1,1,1)$ 3+3

$D(0,1,0)$ و $H(0,1,1)$ 3+3

3 $\boxed{I\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)}$

3 $\boxed{J\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)}$

3 $\boxed{K\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)}$

20

---

3 (2) $\overrightarrow{BD}(-1, 1, 0)$

3 $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

3 $\overrightarrow{IK}(0, 1, 1)$

3 نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{IK}$ و $\overrightarrow{IJ}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{\frac{1}{2}}{1}\right)$

حتى تكون الأشعة المفروضة مرتبطة خطياً يجب أن يوجد عددان حقيقيان α و β يحققان:

$\overrightarrow{BD} = \alpha\overrightarrow{IJ} + \beta\overrightarrow{IK}$

3 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\alpha \\ \alpha + \beta \\ \frac{1}{2}\alpha + \beta \end{pmatrix}$

3 3 3
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha = -1 & (1) \\ \alpha + \beta = 1 & (2) \\ \frac{1}{2}\alpha + \beta = 0 & (3) \end{cases}$$

3 لنأخذ المعادلتين (1) و (2)

من (1) نجد أن $\boxed{\alpha = 2}$

بالتعويض في (2) نجد

$2 + \beta = 1$

3 ومنه $\boxed{\beta = -1}$

نتحقق بالتعويض في (3)

3 $\frac{1}{2}(2) - 1 = 1 - 1 = 0$ محققة

ومنه $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IK}$

3 فالأشعة $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطة خطياً

فالمستقيم (BD) يوازي المستوي (IJK)

③ $\vec{CE}(1, 1, -1)$ 3

$\vec{IJ}(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$

$\vec{CE}\cdot\vec{IJ} = (1)(-\frac{1}{2}) + (1)(1) - 1(\frac{1}{2})$ 3

$= -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}$

$= -1 + 1 = 0$ 3

ومنه $(CE) \perp (IJ)$ .... (1)

$\vec{CE}\cdot\vec{IK} = (1)(0) + 1(1) + 1(-1)$

$= 1 - 1 = 0$ 3

ومنه $(CE) \perp (IK)$ .... (2) 3

من (1) و (2) نجد أن المستقيم (CE) عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي (IJK) 3

ومنه فالمستقيم (EC) يعامد المستوي (IJK) 3

90

التمرين الثاني:

① في المجال $]-\infty, -2]$ يكون f مستمراً عليه 4

و $f(]-\infty, -2]) =]1, 2]$ 4

و $0 \notin]1, 2]$

فليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $]-\infty, -2]$ 4

② في المجال $]-2, -1[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه 4

و $f(]-2, -1[) =]-\infty, 2[$ 4

و $0 \in]-\infty, 2[$

فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد x_1 يقع في المجال $]-2, -1[$ 4

③ في المجال $]-1, 2[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه 4

و $f(]-1, 2[) =]-2, +\infty[$

و $0 \in]-2, +\infty[$ 4

فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد x_2 يقع في المجال $]-1, 2[$ 4

④ في المجال $[2, +\infty[$ يكون f مستمراً عليه 4

و $f([2, +\infty[) = [-3, 0[$

و $0 \notin [-3, 0[$ 4

فليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $[2, +\infty[$ 4

بحسب ما سبق نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حلين على $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

② لقد أثبتنا أن $-2 < x_1 < -1$ 4

وجدنا أن $f(1) = 2 > 0$ و $f(2) = -2 < 0$ 4

$f(1)\cdot f(2) < 0$ فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد x_2 يقع في المجال $]1, 2[$

أي $1 < x_2 < 2$ 4

60

التمرين الثالث:

$h(x) = g(\tan x)$

$h'(x) = g'(\tan x)\cdot(\tan x)'$ 10+10

$h'(x) = \frac{1}{1+\tan^2 x}\cdot(1+\tan^2 x)$ 10+10

$h'(x) = 1$ 10

50

ثالثاً : حل كلاً من المسألتين الآتيتين :

المسألة الأولى :

$z_G = \frac{4 z_B}{3\sqrt{3}\, z_A}$ ، $z_B = -\sqrt{3} - 3i$ ، $z_A = \sqrt{3} - i$

1) $z_A = \sqrt{3} - i$

5 $r = |z_A| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

5 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{2}$ ، $\theta \in$ (4 ربع) ، $\theta = -\frac{\pi}{6}$

5 $\boxed{z_A = 2 e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

$z_B = -\sqrt{3} - 3i$

5 $r = |z_B| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

5 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ، $\theta \in$ ربع 3 ، $\theta = \frac{4\pi}{3}$

5 $\boxed{z_B = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{4\pi}{3}}}$

5 $z_G = \frac{8\sqrt{3}\, e^{i\frac{4\pi}{3}}}{6\sqrt{3}\, e^{i(-\frac{\pi}{6})}}$

5 $z_G = \frac{4}{3} e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)}$

$z_G = \frac{4}{3} e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$

5 $z_G = \frac{4}{3} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

2) لدينا في الطلب السابق

$z_G = \frac{4 z_B}{3\sqrt{3}\, z_A}$

5 $\frac{4}{3} e^{i(-\frac{\pi}{2})} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \frac{z_B}{z_A}$

5 $\frac{z_B}{z_A} = \sqrt{3}\, e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

$\arg\left(\frac{z_B - z_0}{z_A - z_0}\right) = -\frac{\pi}{2}$

5 $(\vec{OA}, \vec{OB}) = -\frac{\pi}{2}$

5 فالمثلث OAB قائم في O ،

5 3) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

5 $z_I = \frac{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - 3i}{2} = -2i$

5 4) $(\vec{OI}, \vec{OG}) = \arg\left(\frac{z_G - z_0}{z_I - z_0}\right)$

5 $\frac{z_G - z_0}{z_I - z_0} = \frac{\frac{4}{3} e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2 e^{-i\frac{\pi}{2}}} = \frac{2}{3}$

5 ومنه $\arg\left(\frac{z_G - z_0}{z_I - z_0}\right) = 0 \ (2\pi)$

$(\vec{OI}, \vec{OG}) = 0 \ (2\pi)$

5 فالنقاط O و G و I تقع على استقامة واحدة

5 5) $\frac{z_O + z_A + z_B}{3} = \frac{0 + \sqrt{3} - i - \sqrt{3} - 3i}{3}$

5 $= -\frac{4}{3} i = \frac{4}{3} e^{-i\frac{\pi}{2}} = z_G$

5 ومنه G مركز ثقل المثلث OAB

١١٥

ملاحظة هامة: إذا اتبع الطالب طريقة صحيحة في الإجابة لم ترد في السلم يقوم المصحح بتوزيع درجة السؤال على هذه الطريقة

المسألة الثانية:

$f(x) = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

1) f مستمر وقابل للاشتقاق على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ 4

ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي (منطبق على $y'oy$) 4

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x}\right) = 2$ 4

ومنه

$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) = \ln 2$ 4

ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 4

$f'(x) = 1 - \frac{\frac{2(x)-1(2x+1)}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}}$ 4

$f'(x) = 1 + \frac{1}{x(2x+1)} > 0$ 4

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	+
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ $+\infty$

2 4 4

2) $f(x) - y_d = -\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) + \ln 2$ 4

$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_d) = -\ln 2 + \ln 2 = 0$ 4

ومنه المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$ 4

لدراسة وضع c بالنسبة إلى d ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y_d = -\ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \ln 2$ 4

لدينا: $2 + \frac{1}{x} > 2$ (لأن $x>0$)

ومنه: $\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) > \ln 2$ 4

ومنه $-\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) + \ln 2 < 0$

أي: $f(x) - y_d < 0$ 4

ومنه c يقع تحت d. 4

3) في المجال $]0,+\infty[$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً على $]0,+\infty[$ 4

و $f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$ 4

و $0 \in]-\infty,+\infty[$

فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0,+\infty[$

إثبات أن $\alpha \in]1,2[$

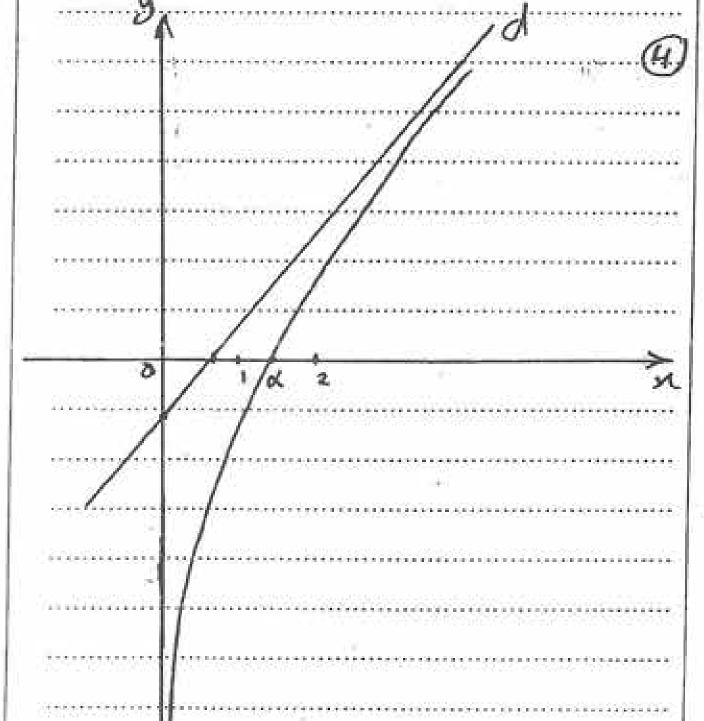
$f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ 4

$f(2) = 2 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

عندئذ $f(1)\cdot f(2) < 0$ 4

فالمعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α يحقق $\alpha \in]1,2[$

4)



4 + 4

90 انتهى السلم

28