أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

1) $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ 5

ومنه $(x=-1)$ مستقيم مقارب شاقولي يوازي $(y'y)$ 5

2) f ليس اشتقاقياً عند $x=2$ 5

لأن المماس للخط C في النقطة شاقولياً 5

3) $f'(1)$ تعني هندسياً ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 1 5

ومن المخطط نجد أن ميل المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها 1 يمر بالنقطتين $(1,-1)$ و $(0,0)$

$f'(1) = \frac{-1-0}{1-0} = -1$ 5

4) للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α يحقق $\alpha \in]0,1[$ 5

5)

x	-1		2
$f'(x)$	$\|$	$-$	$\|$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3

5 5 5

50

السؤال الثاني:

1) $MA = 2MB$

3 $MA^2 = 4MB^2$

3 $(x-3)^2+(y-5)^2+(z-7)^2 = 4(x)^2+4(y+1)^2+4(z-1)^2$

3 $x^2-6x+9+y^2-10y+25+z^2-14z+49 =$

3 $4x^2+4y^2+8y+4+4z^2-8z+4$

3 $3x^2+3y^2+3z^2+6x+18y+6z-75=0$

$\div 3$

3 $x^2+y^2+z^2+2x+6y+2z-25=0$

11

بالإتمام إلى مربع كامل نجد:

3 $x^2+2x+1-1+y^2+6y+9-9+z^2+2z+1-1=25$

3 $(x+1)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=14$

2 وهي تمثل معادلة كرة

3 مركزها $\Omega(-1,-3,-1)$

3 ونصف قطرها $R=\sqrt{14}$

2) N نقطة من المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ فهي تحقق:

3 $NA = NB$

3 $NA^2 = NB^2$

$(x-3)^2+(y-5)^2+(z-7)^2 = x^2+(y+1)^2+(z-1)^2$

3 $x^2-6x+9+y^2-10y+25+z^2-14z+49 =$

$x^2+y^2+2y+1+z^2-2z+1$

3 $6x+12y+12z=81$

$\div 3$

3 $2x+4y+6z=27$

3 $\boxed{2x+4y+6z-27=0}$

50

السؤال الثالث:

$f(x) = \frac{x^2+2x+5-\cos x}{x-1}$

الحل:

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x-1 & x^2+2x+5-\cos x \\ & \mp x^2 \pm x \\ \hline & 3x+5-\cos x \\ & \mp 3x \pm 3 \\ \hline & 8-\cos x \end{array}$$

3 $f(x) = x+3+\frac{8-\cos x}{x-1}$

3 نفرض $D: y = x+3$

3 $f(x)-y_D = \frac{8-\cos x}{x-1}$

3 $-1 \le \cos x \le 1$

3 $1 \ge -\cos x \ge -1$ $(x-1)$

3 $9 \ge 8-\cos x \ge 7$

بما أنّ x في جوار $-\infty$ فإذاً
ضربنا المتراجحة على $(x-1)$ سوف تتغير
جهة المتراجح :

3 $\frac{9}{x-1} \leq \frac{8-\cos x}{x-1} \leq \frac{7}{x-1}$

3 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{9}{x-1}\right)=0$ ، $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{x-1}\right)=0$ ولكن

فإن استناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1)
نجد أنّ

3 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8-\cos x}{x-1}\right)=0$

3 ومنه $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_D\right)=0$

وبالتالي المستقيم D الذي معادلته
3 $\boxed{y=x+3}$ مقارب مائل للخط C
في جوار $-\infty$

لدراسة وضع C بالنسبة إلى D
ندرس إشارة الفرق

3 $f(x)-y_D=\frac{8-\cos x}{x-1}$

3 نلاحظ أنّ $8-\cos x>0$
(لأنّ $7\leq 8-\cos x\leq 9$)

3 فإشارة $f(x)-y_D$ من إشارة المقام $(x-1)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y_D$	$-$	||	$+$
الوضع النسبي	C يقع تحت D	||	C يقع فوق D

50

السؤال الرابع :

① $e^{2x}-2e^{x}<0$

5 $e^{x}(e^{x}-2)<0$

بما أنّ $e^{x}>0$
5 فإشارة المقدار $e^{x}(e^{x}-2)$
هي إشارة $(e^{x}-2)$
5 والمتراجحة تكافئ
5 $e^{x}-2<0$
$e^{x}<2$
5 $x<\ln 2$
5 $x\in\,]-\infty,\ln 2[$

② $\ln(e^{x}-3)=2$

5 $\ln(e^{x}-3)=\ln e^{2}$
5 $e^{x}-3=e^{2}$
5 $e^{x}=e^{2}+3$
نأخذ لوغاريتم الطرفين

5 $\boxed{x=\ln(e^{2}+3)}$

50

ثانياً: حل التمارين الثلاثة الآتية:

التمرين الأول:

① $F(1,0,0)$ 5
$C(0,0,1)$ 5
$D(0,1,1)$ 5
$J(0,\frac{1}{2},1)$ 5

$M\left(\frac{x_C+x_G+x_D}{3},\frac{y_C+y_G+y_D}{3},\frac{z_C+z_G+z_D}{3}\right)$ 3

$M\left(\frac{0+0+0}{3},\frac{0+0+1}{3},\frac{1+0+1}{3}\right)$

$\boxed{M\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)}$ 5

$N\left(\frac{x_F+x_C+x_G}{3},\frac{y_F+y_C+y_G}{3},\frac{z_F+z_C+z_G}{3}\right)$ 2

$N\left(\frac{1+0+0}{3},\frac{0+0+0}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)$

$\boxed{N\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)}$ 5

② $\overrightarrow{MN}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 5

$\overrightarrow{GB}(1,0,1)$ 5

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{1}{3}(1)+0-\frac{1}{3}(1)=0$ 5

ومنه نستنتج أن المستقيمين (GB) و (MN) متعامدان. 5

$C(0,0,1)$
$H(0,1,0)$ $\overrightarrow{CH}(0,1,-1)$ 5

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CH}=\left(\frac{1}{3}\right)(0)-\frac{1}{3}(1)-\frac{1}{3}(-1)$ 5

$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$

فالمستقيمان (CH) و (MN) متعامدان. 5

③ المستقيمات المحتواة على مستقيم واحد في فراغ ليست بالضرورة أن يكونا متوازيين.

5 $\overrightarrow{GB}(1,0,1)$

5 $\overrightarrow{CH}(0,1,-1)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{CH}$ و $\overrightarrow{GB}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما

5 غير متناسبة $\left(\frac{0}{1}\neq\frac{1}{-1}\right)$

5 فالمستقيمان (CH) و (GB) غير متوازيين

90

التمرين الثاني:

① $\frac{a-b}{c-b}=\frac{(3+\sqrt{3}i)-(\sqrt{3}i)}{(3-2\sqrt{3}i)-(\sqrt{3}i)}$

10 $=\frac{3+\sqrt{3}i}{3-3\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-3i}$

5×4 $\frac{a-b}{c-b}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{\pi}{2}}$

ومنه

5 $\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)=\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

5 ومنه $(AB)\perp(CB)$
فالمثلث ABC قائم في B

② عندما يكون الرباعي $ABCD$ مستطيلاً

5 فإن أقطاره متناصفة

5 ومنه $\frac{a+c}{2}=\frac{b+d}{2}$

$b+d=a+c$

5 $d=a+c-b$

$d=(3+2\sqrt{3}i)+(3-2\sqrt{3}i)-\sqrt{3}i$

5 $d=6-\sqrt{3}i$

50 المجموع

١٢

التمرين الثالث:

$h(x) = g(\cos x)$

10 $h'(x) = g'(\cos x) . (\cos x)'$

10 $= \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} . (-\sin x)$

10 $= \dfrac{1}{\sqrt{\sin^2 x}} . (-\sin x)$

10 $= \dfrac{1}{|\sin x|} . (-\sin x)$

علماً أن $x \in]-\pi, 0[$ فإن x تنتمي إلى الربعين الثالث والرابع ومنه

5 $|\sin x| = -\sin x$

5 $h'(x) = \dfrac{1}{-\sin x} . (-\sin x)$

10 $\boxed{h'(x) = 1}$

60

ثالثاً: حل المسائل الآتية:

المسألة الأولى:

(1) حل في C المعادلة $z^2 - 8\sqrt{3} z + 64 = 0$

5 $\Delta = -64 \qquad \sqrt{-\Delta} = 8$

5 $z_1 = \dfrac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i$

5 $z_2 = \bar{z}_1 = 4\sqrt{3} - 4i$

(2)

5 $z_A = 8 e^{i\frac{\pi}{6}}$

5 $z_B = 8 e^{-i\frac{\pi}{6}}$

4 $OA = |z_A| = 8$

4 $OB = |z_B| = 8$

4 $AB = |z_B - z_A| = |8i| = 8$

3 فالمثلث ABO متساوي الأضلاع

(3)

10 $z_D = e^{-i\frac{\pi}{3}} z_C$

5 ومنه $z_D = \left(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3}\right) z_C$

5 $z_D = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} + i)$

5 $z_D = 2i$

(4)

$\dfrac{z_E - z_C}{z_D - z_C} = \dfrac{(4\sqrt{3}+6i) - (-\sqrt{3}+i)}{(2i) - (-\sqrt{3}+i)}$

5 $= \dfrac{5\sqrt{3} + 5i}{\sqrt{3} + i} = \dfrac{5(\sqrt{3}+i)}{\sqrt{3}+i}$

5 $= 5$

5 ومنه $\arg\left(\dfrac{z_E - z_C}{z_D - z_C}\right) = 0 \ (2\pi)$

5 أي C , D , E على استقامة واحدة

(5)

$\dfrac{z_C - z_A}{z_E - z_A} = \dfrac{(-\sqrt{3}+i) - (4\sqrt{3}-4i)}{(4\sqrt{3}+6i) - (4\sqrt{3}-4i)}$

3 $= \dfrac{-5\sqrt{3} + 5i}{10i}$

3 $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

3 $\dfrac{z_C - z_A}{z_E - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

2+2 $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_E - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{3} , \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_E - z_A}\right| = 1$

2+2 ومنه $C\hat{A}E = 60^\circ \quad AC = AE$

3 المثلث ACE متساوي الأضلاع

100 المجموع

المسألة الثانية : (90 درجة)

$$f(x) = \begin{cases} x\ln x & : x>0 \\ 0 & : x=0 \end{cases}$$

① عندما $x>0$ يكون $f(x)=x\ln x$ ومنه

4 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

4 عندما $x=0$ يكون $f(0)=0$

4 نلاحظ أن $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$
ومنه f مستمر عند 0.

② نضع نسبة التغير للتابع f عند 0 وهو

4 $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ المعرف على $]0,+\infty[$

4 $g(x) = \dfrac{x\ln x - 0}{x} = \ln x$

4 ومنه $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$

4 ومنه f ليس اشتقاقياً عند 0.

4 ويكون للخط C مماس شاقولي في النقطة $O(0,0)$ ومعادلته $x=0$.

③

4 $f'(x) = 1\ln x + \frac{1}{x}x$

4 $f'(x) = \ln x + 1$

عندما $f'(x)=0$: $\ln x + 1 = 0$

4 ومنه $\ln x = -1$

$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

4 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$

10

4 f متناقص على $]0,\frac{1}{e}]$
ومتزايد على $[\frac{1}{e},+\infty[$

4 $f(0) = 0$

4 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4 4 4

④ 4 $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

4 $f'(1) = 1$

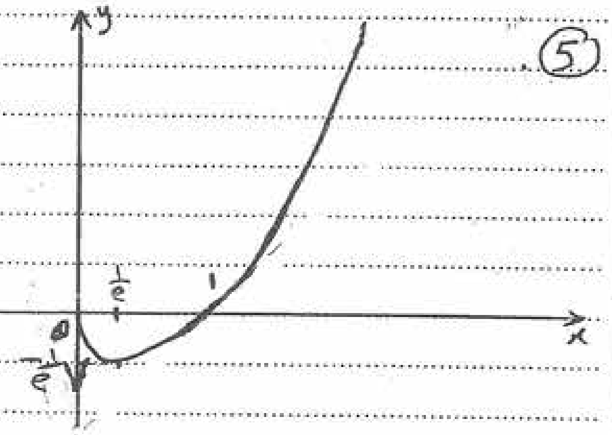
$f(1) = 0$

4 $y = 1(x-1) + 0$

$\boxed{y = x-1}$

⑤

6



90