أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

f معرّف على $]-\infty,0[\cup]0,2[\cup]2,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ 3

ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي (منطبق على $x'x$) 3

$\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ 3

$\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ 3

ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي (منطبق على $y'y$)

$\lim_{x\to2^-} f(x)=-\infty$ 3

$\lim_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ 3

ومنه $\boxed{x=2}$ مستقيم مقارب شاقولي (يوازي $y'y$) 3

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ 3

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ (ميل المقارب $y=-x+2$) 3

ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ 3

(3) $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x-2)=$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(-x+2))=0$ 3

لأنه لدينا من جهة $+\infty$ مقارب مائل $y=-x+2$

(4) $\lim_{x\to-1}\left(\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\right)=f'(-1)$ 3

لأن f اشتقاقي عند -1

نلاحظ أن المماس للخط C في النقطة التي فاصلتها -1 يمر بالنقطتين $(-2,0)$ و $(0,2)$ ومنه 3

$f'(-1)=\frac{2-0}{0+2}=1$ 3

(5) $g(x)=f(2x)$

$g'(x)=f'(2x)\cdot(2x)'$

$g'(x)=f'(2x)\cdot(2)$ 3

$g'(-\frac{1}{2})=f'(-1)\cdot(2)$ 3

$=1\cdot(2)=2$ 2

50

السؤال الثاني:

$A(1,0,-2)$ و $B(3,3,1)$

$C(7,\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ و $D(1,\frac{13}{2},\frac{5}{2})$

(1) $\vec{AB}(2,3,3)$ 5

$\vec{DC}(6,-4,0)$ 5

$\vec{AB}\cdot\vec{DC}=(2)(6)+(3)(-4)+(3)(0)$ 5 5

$=12-12=0$

ومنه $(DC)\perp(AB)$ 5

(2) حتى تكون النقطة C هي المسقط القائم للنقطة D على المستقيم (AB)

يجب أن تقع النقاط A و B و C على استقامة واحدة (كون $(DC)\perp(AB)$) 5

$\vec{AB}(2,3,3)$

$\vec{AC}(6,\frac{5}{2},\frac{9}{2})$ 5

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{AC}$ و $\vec{AB}$ 5

غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة 5

$\left(\frac{2}{6}\neq\frac{3}{\frac{5}{2}}\right)$

فالنقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة

ومنه فالنقطة C ليست هي المسقط القائم للنقطة D على المستقيم (AB) 5

50

السؤال الثالث:

$f(x) = x\cdot E(x) - \frac{1}{2} E(x)\left(1+E(x)\right)$

① $f(x)=\begin{cases}0 & ;\ 0\le x<1 \\ x(1)-\frac{1}{2}(1+1) & ;\ 1\le x<2 \\ x(2)-\frac{1}{2}(2)(1+2) & ;\ 2\le x<3\end{cases}$ 5 5 5

$f(x)=\begin{cases}0 & ;\ 0\le x<1 \\ x-1 & ;\ 1\le x<2 \\ 2x-3 & ;\ 2\le x<3\end{cases}$ 5 5 5

② f مستمر على $[0,3[\setminus\{1,2\}$ 5

وحتى يكون f مستمراً على $[0,3[$

يجب أن يكون مستمراً عند 1 و عند 2

لندرس استمرار التابع f عند 1:

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1}(0) = 0 = f(1) = 1-1=0$ 5

ومنه f مستمر عند $x=1$

لندرس استمرار f عند 2:

$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2}(x-1) = 1 = f(2) = 4-3=1$ 5

ومنه f مستمر عند 2

وبالتالي f مستمر على $[0,3[$ 5

50

السؤال الرابع:

$f(x)=\ln x$ و $g(x)=\ln\frac{1}{x}$

① $f(x)=1$ 3

$\ln x = 1$ 2

$\boxed{x=e}$

ومنه $\boxed{A(e,1)}$ 3

$g(x)=1$

$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=1$

$-\ln x = 1$ 3

$\ln x = -1$

ومنه $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$ 3

ومنه $\boxed{B\left(\frac{1}{e},1\right)}$ 3

② $T_A: y=f'(e)(x-e)+f(e)$ 3

f اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{1}{x}$ 3

$f'(e)=\frac{1}{e}$ 3

$f(e)=1$ 3

ومنه

$y=\frac{1}{e}(x-e)+1$

$T_A: \boxed{y=\frac{1}{e}x}$ 3

يكون المماسان T_A و D_B متعامدين

إذا كان جداء جذب ميليهما يساوي -1

أي يجب أن يتحقق

$m_{T_A}\cdot m_{D_B} = -1$ 3

$m_{T_A} = f'(e) = \frac{1}{e}$ 3

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$g(x) = -\ln x$

$g'(x)=-\frac{1}{x}$

$m_{D_B} = g'\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e$ 3

$m_{T_A}\cdot m_{D_B} = \frac{1}{e}(-e)=-1$ 3

فالمماسان T_A و D_B متعامدين. 3

50

ثانياً: حلي التمارين الثلاثة الآتية:

التمرين الأول

15 $\alpha^7 = (e^{i\frac{2\pi}{7}})^7 = e^{i2\pi} = 1$

5+5 $\frac{(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6)(1-\alpha)}{(1-\alpha)} = \frac{1-\alpha^7}{1-\alpha}$

5 $= \frac{1-1}{1-\alpha} = 0$

4 أولاً: $A = \alpha + \alpha^6 = \alpha + \frac{\alpha^7}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{\alpha}$

4 $A = \alpha + \alpha^{-1} = e^{i\frac{2\pi}{7}} + e^{-i\frac{2\pi}{7}}$

وحسب دستور أولر نجد

2 $\boxed{A = 2\cos\frac{2\pi}{7}}$

ثانياً: $B = \alpha^2 + \alpha^5 = \alpha^2 + \frac{\alpha^7}{\alpha^2}$

4 $B = \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} = \alpha^2 + \alpha^{-2}$

$B = (e^{i\frac{2\pi}{7}})^2 + (e^{i\frac{2\pi}{7}})^{-2}$

4 $B = e^{i\frac{4\pi}{7}} + e^{-i\frac{4\pi}{7}}$

2 حسب أولر $\boxed{B = 2\cos\frac{4\pi}{7}}$

ثالثاً: $C = \alpha^3 + \alpha^4 = \alpha^3 + \frac{\alpha^7}{\alpha^3}$

4 $C = \alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = \alpha^3 + \alpha^{-3}$

$C = (e^{i\frac{2\pi}{7}})^3 + (e^{i\frac{2\pi}{7}})^{-3}$

4 $C = e^{i\frac{6\pi}{7}} + e^{-i\frac{6\pi}{7}}$

2 حسب أولر $\boxed{C = 2\cos\frac{6\pi}{7}}$

وجدنا أن

$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6 + \alpha^7 = 1$

ومنه

2 $\underbrace{\alpha+\alpha^6}_{A} + \underbrace{\alpha^2+\alpha^5}_{B} + \underbrace{\alpha^3+\alpha^4}_{C} = -1$

$A + B + C = -1$

4 $2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7} = -1$

4 $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{-1}{2}$

70

التمرين الثاني: $f(x) = \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}$

① f معرّف ومستمر على $[0,+\infty[$

5 واشتقاقي على $]0,+\infty[$

5 $f(0) = 1$

5 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

5 $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$

x	0		$+\infty$
5 $f'(x)$		$-$	
5 $f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

5 f مستمر ومتناقص تماماً على $[0,+\infty[$

5 فإنه f: هنالك حل للمعادلة $f(x)=0$

حل وحيد.

ولدينا

5 $f(0) = 1$

5 $f(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

5 بما أن: $f(0) \cdot f(1) < 0$

ومنه المعادلة $f(x) = 0$

5 لها حل وحيد يقع في المجال $]0,1[$

60

التمرين الثالث:

1) $D(0,0,6)$ 3

$B(4,0,0)$ 3

$C(0,4,0)$ 3

$I(2,2,0)$ 3

$G\left(\frac{0+0+2}{3}, \frac{0+0+2}{3}, \frac{0+6+0}{3}\right)$

$G\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$ 3

$\vec{BM} = -3\vec{AC}$

نفرض $M(x,y,z)$ 4

$(x-4, y, z) = -3(0,4,0)$

$x-4=0 \Rightarrow \boxed{x=4}$

$\boxed{y=-12}$

$\boxed{z=0}$

ومنه $M(4,-12,0)$ 3

2) $\vec{DI}(2,2,-6)$ 3

$\vec{BC}(-4,4,0)$ 3

$\vec{DI}\cdot\vec{BC} = (2)(-4)+(2)(4)+0$

$= -8+8=0$ 4

فالشعاعان $\vec{BC}$ و $\vec{DI}$ متعامدان 4

$A(BDC) = \frac{1}{2} BC \cdot DI$ 4

$BC = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ 4

$DI = \sqrt{4+4+36} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$ 4

$A(BDC) = \frac{1}{2}\, 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{11}$ 4

$\boxed{A(BDC) = 4\sqrt{22}}$ 4

3) $\vec{AM} = \alpha\vec{DG} + \beta\vec{DC}$

لدينا $\vec{DG}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -4\right)$ 3

$\vec{DC}(0,4,-6)$ 3

4 $\begin{pmatrix}4\\-12\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\-4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\4\\-6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}4\\-12\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\alpha\\\frac{2}{3}\alpha+4\beta\\-4\alpha-6\beta\end{pmatrix}$

4 $\begin{cases}\frac{2}{3}\alpha = 4 & (1)\\ \frac{2}{3}\alpha+4\beta = -12 & (2)\\ -4\alpha-6\beta = 0 & (3)\end{cases}$

نأخذ المعادلتين (1) و (3)

4 من (1) نجد $\boxed{\alpha = 6}$

نعوض في (3) فنجد

$-4(6) - 6\beta = 0$

$6\beta = -24$

4 $\boxed{\beta = -4}$

نتحقق بالتعويض في (2)

4 $\frac{2}{3}(6) + 4(-4) =$

$4 - 16 = -12$ محققة

4 ومنه $\boxed{\vec{AM} = 6\vec{DG} - 4\vec{DC}}$

وبالتالي فالأشعة $\vec{AM}$ و $\vec{DG}$ و $\vec{DC}$

4 مرتبطة خطياً ومنه

المستقيم (AM) يوازي المستوي (DGC)

90

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى: (90 درجة)

5 ① E صورة C وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ومنه $z_E - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C - z_A)$

10 وبما أن $\begin{cases} z_A = 0 \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i \end{cases}$ إذاً $\boxed{e = ic}$

5 D صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

$z_D - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A)$

10 $\begin{cases} z_A = 0 \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \end{cases}$ إذاً $\boxed{d = -ib}$

5 ② $\frac{d-c}{b-e} = \frac{-ib-c}{b-ic} = \frac{-i(b-ic)}{b-ic}$

5 $\frac{d-c}{b-e} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

5+5 $\arg\left(\frac{d-c}{b-e}\right) = -\frac{\pi}{2}$ $\left|\frac{d-c}{b-e}\right| = 1$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

5+5 $(EB) \perp (CD)$ $CD = EB$

③ قطرا الرباعي CBDE متعامدان ومتساويان

3 أصلاً وإذا كان هذا الرباعي مربعاً فيجب أن يكون قطراه [EB] و [CD] متناصفين

5 ومنه $\frac{e+b}{2} = \frac{c+d}{2}$

3 $c + d = e + b$

$c - ib = ic + b$

$c(1-i) = b(1+i)$

3 $\frac{c}{b} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i(\frac{\pi}{2})} = i$

3 ومنه $c = ib$

$c = e^{i\frac{\pi}{2}} b$

3 C صورة B وفق دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

فالمثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

90

المسألة الثانية: (90 درجة)

$f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3 ① $\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$

3 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$

3 $= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

3 $= \lim_{X\to+\infty} 2\frac{\ln X}{X} = 0$

3 ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3 $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

3 ومنه المستقيم $\boxed{x=0}$ مقارب شاقولي

3 ② $f(x) - y_\Delta = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3 $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y_\Delta) = 0$

(حيث أثبتنا في الطلب السابق أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$)

3 ومنه فالمستقيم Δ الذي معادلته $\boxed{y = x-1}$ مقارب مائل للخط C_f في جوار $+\infty$

لدراسة وضع C_f بالنسبة إلى Δ ندرس إشارة الفرق:

3 $f(x) - y_\Delta = -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3 $f(x) - y_\Delta = 0$ عندما $\ln x = 0$ ومنه $\boxed{x=1}$

	x	0		1		$+\infty$
2						
3	$f(x)-y_\Delta$	‖	+	0	−	
3	الوضع النسبي	‖	C فوق Δ	نقطة مشتركة بين C و Δ	C تحت Δ	
2						

(3)

3 $f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{x}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}$

3 $f'(x)=1-\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}$

3 $f'(x)=1-\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

3 $f'(x)=\dfrac{2x\sqrt{x}-2+\ln x}{2x\sqrt{x}}$

3 $f'(x)=\dfrac{2(x\sqrt{x}-1)+\ln x}{2x\sqrt{x}}$

3 $f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$

حيث $g(x)=2(x\sqrt{x}-1)+\ln x$

3 $g(1)=0$

2 بما أن $x\sqrt{x}-1<0$ عندما $0<x<1$

و $\ln x<0$ عندما $0<x<1$

ومنه $g(x)<0$ عندما $0<x\le 1$

2 (مجموع عددين سالبين هو عدد سالب).

2 وبما أن $x\sqrt{x}-1>0$ عندما $x>1$

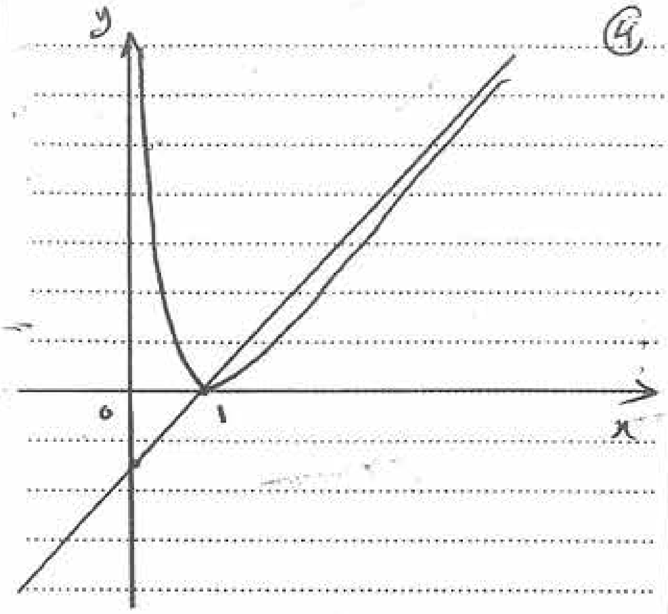
و $\ln x>0$ عندما $x>1$

2 ومنه $g(x)>0$ عندما $x>1$

(مجموع عددين موجبين هو عدد موجب)

x	0		1		$+\infty$
3 $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
3 $f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(4)



3

3

90 انتهى السلم.