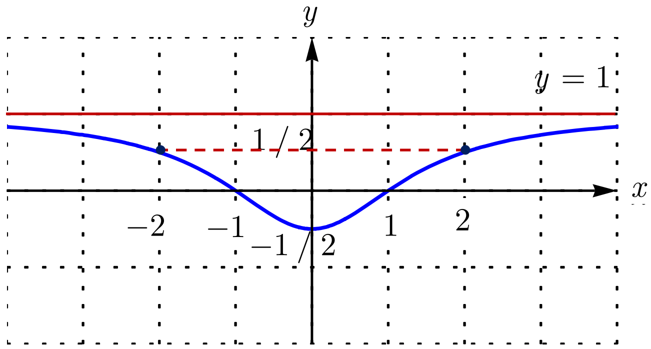
أولاً : أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : f تابعٌ معرف على $\mathbb{R}$، C خطّه البياني المرسوم في الشكل المجاور:



❶ ولنعرف التابع $g: x \mapsto \ln(f(x))$. بالاستفادة من الخط البياني C للتابع f .

استنتجي مجموعة تعريف التابع g .

❷ حلي المتراجحة : $f(x) \le \frac{1}{2}$.

❸ ولنعرّف التابع $h: x \mapsto \frac{1}{f(x)}$. بالاستفادة من الخط البياني C للتابع f . ما مجموعة تعريف التابع h ؟

❹ استنتجي نهايات كلاً من التابعين f و h عند أطراف مجموعة تعريفهما .

الحل

❶ إنّ التابع g معرّف عندما يكون $f(x) > 0$

6 وهذا محقق عندما $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.

6 ❷ المعادلة : $f(x) \le \frac{1}{2}$ محققة عندما $x \in [-2,2]$.

❸ التابع $h: x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ معرّف عندما يكون f معرّفاً و $f(x) \ne 0$ وهذا محقق عندما $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ أي

6 $x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

❹ التابع f معرّف على $\mathbb{R}$ أي $x \in]-\infty,+\infty[$

6 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

التابع h معرّف عندما

$x \in]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$ و

3 $\lim\limits_{x\to(-1)^-} h(x) = +\infty$ (لأنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = 0^+$)

3 $\lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x) = -\infty$ (لأنّ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = 0^-$)

3 $\lim\limits_{x\to1^-} h(x) = -\infty$ (لأنّ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0^-$)

3 $\lim\limits_{x\to1^+} h(x) = +\infty$ (لأنّ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0^+$) .

40

السؤال الثاني:

f تابع يحقق المتراجحة :

$\left|f(x)+2\right| \le 2\sqrt{x^2+1}+2x$ أياً تكن $x \in \mathbb{R}$

احسبي نهاية f عند $-\infty$.

الحل

بفرض $g(x) = 2\sqrt{x^2+1}+2x$

نلاحظ أنّ نهاية التابع g عند $-\infty$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty +$ لإزالتها نضرب بالمرافق ونقسّم عليه:

8 $$g(x) = \frac{(2\sqrt{x^2+1}+2x)\cdot(2\sqrt{x^2+1}-2x)}{(2\sqrt{x^2+1}-2x)}$$

$$g(x) = \frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\sqrt{x^2+1}-2x} = \frac{4}{2\sqrt{x^2+1}-2x}$$

8 ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$

8 أصبح لدينا $\left|f(x)-(-2)\right| \le g(x)$

8 ولمّا كان $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ كان استناداً إلى مبرهنة الإحاطة (2) : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

8

40

السؤال الثالث :

اكتبي كلاً من العددين العقديين z_1 و z_2 بالشكل $a+bi$

$$z_1=\left(\frac{3+i}{1+2i}\right)^9 \quad ، \quad z_2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^8 \; .$$

الحل

$$z_1=\left(\frac{3+i}{1+2i}\right)^9$$

بفرض $w=\dfrac{3+i}{1+2i}$ نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$w=\frac{(3+i)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)}$$ 2

ومنه $w=\dfrac{3-6i+i+2}{1+4}=\dfrac{5-5i}{5}=1-i$ 2

$$z_1=w^9=(1-i)^9=(1-i)\cdot((1-i)^2)^4$$ 2

$$=(1-i)\cdot(-2i)^4=(1-i)(16)=16-16i$$ 2

$$z_2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{1+i}\right)^8$$

بفرض $w_1=-1+\sqrt{3}i$ و $w_2=1+i$

فيكون $z_2=\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)^8$

لنكتب كلاً من w_1 و w_2 بالشكل المثلثي :

$$w_1=-1+\sqrt{3}i$$

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$$ 2

$\cos\theta=\dfrac{a}{r}=\dfrac{-1}{2}$ و $\sin\theta=\dfrac{b}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 2

ومنه: الربع الثاني $\in\theta$ وبالتالي $\theta=\dfrac{2\pi}{3}\;(2\pi)$ 2

فالشكل المثلثي للعدد $w_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

ومنه $w_1=2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$ 2

$$w_2=1+i$$

$$r=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{2}$$ 2

$\cos\theta=\dfrac{a}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta=\dfrac{b}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 2

ومنه: الربع الأول $\in\theta$ وبالتالي $\theta=\dfrac{\pi}{4}\;(2\pi)$ 2

فالشكل المثلثي للعدد $w_2=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$ 2

ومنه :

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})}$$ 2

$$=\sqrt{2}(\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}))$$ 2

$$\frac{w_1}{w_2}=\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{12})+i\sin(\frac{5\pi}{12}))$$ 2

2

ومنه $z_2=\left(\dfrac{w_1}{w_2}\right)^8=16(\cos(\dfrac{40\pi}{12})+i\sin(\dfrac{40\pi}{12}))$ 2

$$z_2=16(\cos(\frac{10\pi}{3})+i\sin(\frac{10\pi}{3}))\cdot$$ 2

$$z_2=16(\cos(\frac{10\pi}{3}-2\pi)+i\sin(\frac{10\pi}{3}-2\pi))$$ 2

$$z_2=16(\cos(\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{4\pi}{3}))$$ 2

$z_2=16(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ ومنه $z_2=-8-i8\sqrt{3}$ 2

40

السؤال الرابع :

ليكن f التابع المعرّف وفق العلاقة :

$$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}} \; .$$

❶ ما مجموعة تعريف التابع f ؟

❷ أوجدي نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه .

الحل

❶ f معرّف عندما يكون $x^2-4>0$ وهذا محقق عندما $x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

❷

❒ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ حالة عدم تعيين من الشكل $\dfrac{-\infty}{\infty}$ لإزالتها نكتب :

$$f(x)=\frac{x(1-\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{4}{x^2})}}=\frac{x(1-\frac{2}{x})}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$ 4

ومنه $f(x)=\dfrac{x(1-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$ 4

وبما أنّ x في جوار $-\infty$ فإنّ $|x|=-x$ وبالتالي

$$f(x)=\frac{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}{-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$ 4

وبما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}=0$ فإنّ

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$ 4

❒ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ لإزالتها نكتب :

$$f(x)=\frac{x(1-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

وبما أنّ x في جوار $+\infty$ فإنّ $|x|=x$ وبالتالي

$$f(x)=\frac{\cancel{x}(1-\frac{2}{x})}{\cancel{x}\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$ 4

وبما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}=0$ فإنّ 4

. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

❒ $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=-\infty$. 4

❒ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها نضرب بالمرافق ونقسم عليه :

$$f(x)=\frac{(x-2)\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}.\sqrt{x^2-4}}=\frac{(x-2)\sqrt{x^2-4}}{x^2-4}$$ 4

ومنه $f(x)=\dfrac{(x-2)\sqrt{x^2-4}}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{(x+2)}$ 4

وبالتالي $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=0$. 4

40

ثانياً : **حلي التمارين الأربع الآتية** : **(50درجة لكل سؤال)**

التمرين الأول : احسبي كلاً من النهايات الآتية :

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-x)$. ❷ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\cos x}{1-x})$.

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+2\cos x}{2+\sin x})$.

الحل

❶ نلاحظ أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-x)$ حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty-\infty$ لإزالتها نكتب : 3

$$\sqrt{x+1}-x=\sqrt{x^2(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}-x$$ 3

$$=\sqrt{x^2}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x=|x|\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x$$ 3

وبما أنّ x في جوار $+\infty$ فإنّ $|x|=x$ ومنه

$$\sqrt{x+1}-x=x\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x=x(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1)$$ 3

ولمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ كان 3

. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-x)=-\infty$

❷ لإيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\cos x}{1-x})$ نطبّق مبرهنة الإحاطة

$-1\le\cos x\le1$ بما أنّ x في جوار $+\infty$ فإذا قسّمنا 3

المتراجحة على $(1-x)$ سوف تتغير جهة التراجح

$$\frac{-1}{1-x}\ge\frac{\cos x}{1-x}\ge\frac{1}{1-x}$$ 6

لمّا كان $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{-1}{1-x})=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{1-x})=0$

كان استناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد أنّ 3

. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\cos x}{1-x})=0$ 3

❸ لإيجاد $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x+2\cos x}{2+\sin x})$

$-1\le\cos x\le1$ ومنه $-2\le2\cos x\le2$ 3

وبالتالي $x-2\le x+2\cos x\le x+2$ .... (I) 3

$-1\le\sin x\le1$ ومنه $1\le2+\sin x\le3$ 3

$$1\ge\frac{1}{2+\sin x}\ge\frac{1}{3}$$ 3

ومنه $\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin x} \le 1 \quad \ldots\ldots (II)$

بما أنّ x في جوار $+\infty$ فإنّ أطراف المتراجحتين (I) و (II) موجبة تماماً فنستطيع ضرب المتراجحتين طرفاً إلى طرف فيكون : $\frac{x-2}{3} \le \frac{x+2\cos x}{2+\sin x} \le x+2$ 3

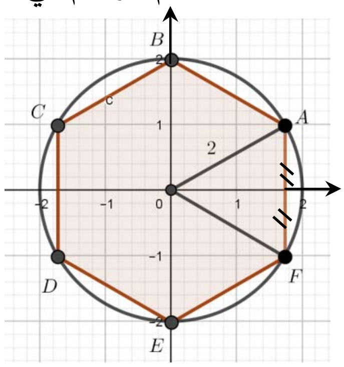
ومنه $\frac{x-2}{3} \le \frac{x+2\cos x}{2+\sin x}$ ولمّا كان 3

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{3} = +\infty$ فاستناداً إلى مبرهنة المقارنة عند اللانهاية نجد أنّ $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+2\cos x}{2+\sin x}) = +\infty$. 2

50

التمرين الثاني :

$ABCDEF$ مسدس منتظم مرسوم في الشكل المجاور :



اكتبي الأعداد العقدية المقابلة لرؤوس هذا المضلع المنتظم بالشكل المثلثي .

ثمّ أثبتي أنّ مجموع هذه الأعداد يساوي الصفر .

الحل

$A(r;\theta)$ ومنه $A(2;\frac{\pi}{6})$ وبالتالي

$$\boxed{z_A = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})}$$ 5

$B(r;\theta)$ ومنه $B(2;\frac{\pi}{2})$ وبالتالي

$$\boxed{z_B = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})}$$ 5

$C(r;\theta)$ ومنه $C(2;\pi-\frac{\pi}{6})$ أي $C(2;\frac{5\pi}{6})$ وبالتالي

$$\boxed{z_C = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})}$$ 5

نلاحظ أنّ $z_D = \overline{z_C} = 2(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6})$

ومنه $z_D = 2(\cos(\frac{-5\pi}{6}+2\pi) + i\sin(\frac{-5\pi}{6}+2\pi))$

$$\boxed{z_D = 2(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6}))} \ .$$ 5

ونلاحظ أنّ $\boxed{z_E = \overline{z_B} = 2(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2})}$ 5

ونلاحظ أنّ $\boxed{z_F = \overline{z_A} = 2(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6})}$ 5

لإثبات أنّ مجموع هذه الأعداد يساوي الصفر يجب كتابة كل منها بالشكل الجبري :

$$\boxed{z_A = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} + i}$$ 3

$$\boxed{z_B = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i}$$ 3

$$\boxed{z_C = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3} + i}$$ 3

$$\boxed{z_D = 2(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})) = -\sqrt{3} - i}$$ 3

$$\boxed{z_E = \overline{z_B} = 2(\cos\frac{-\pi}{2} + i\sin\frac{-\pi}{2}) = -2i}$$ 3

$$\boxed{z_F = \overline{z_A} = 2(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}) = \sqrt{3} - i}$$ 3

وبالتالي :

$$z_A + z_B + z_C + z_D + z_E + z_F =$$
$$\sqrt{3} + i + 2i - \sqrt{3} + i + -\sqrt{3} - i - 2i + \sqrt{3} - i = 0$$ 2

50

التمرين الثالث :

❶ اكتبي العبارة الآتية بأبسط شكل ممكن :

$A = \ln(3+\sqrt{5})^7 + \ln(3-\sqrt{5})^7$.

❷ حلّي المعادلة الآتية :

$2(\ln x)^2 + \ln(\frac{e}{x}) - 1 = 0$.

❸حلّي المتراجحة الآتية : $\ln(x-1) > \ln x - 1$

الحل

❶ $A = \ln(3+\sqrt{5})^7 + \ln(3-\sqrt{5})^7$

$A = \ln((3+\sqrt{5})^7 \cdot (3-\sqrt{5})^7)$ 3

$= \ln((3+\sqrt{5})\cdot(3-\sqrt{5}))^7$ 3

$= 7\ln(9-5) = 7\ln 4 = 7\ln 2^2 = 14\ln 2$ 3

❷ $2(\ln x)^2 + \ln(\frac{e}{x}) - 1 = 0$

المعادلة معرّفة عندما $x \in]0,+\infty[$ 3

ومنه $2(\ln x)^2 + \ln e - \ln x - 1 = 0$ 3

وبالتالي $2(\ln x)^2 + 1 - \ln x - 1 = 0$ 3

وهي تكافئ $2(\ln x)^2 - \ln x = 0$

$\ln x \cdot (2\ln x - 1) = 0$ 3

إما $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$. 3

أو $2\ln x - 1 = 0$ ومنه $\ln x = \frac{1}{2}$ وبالتالي 3

$x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

فمجموعة حلول المعادلة المفروضة هي $S = \{1, \sqrt{e}\}$ 3

❸ $\ln(x-1) > \ln x - 1$

❐ مجموعة تعريف المتراجحة هي : $x > 0$ و $x > 1$

ومنه $x \in]1,+\infty[$ أو $D_1 =]1,+\infty[$. 3

❐ $\ln(x-1) > \ln x - \ln e$ نطبق خواص اللوغاريتم

$\ln(x-1) > \ln\frac{x}{e}$ ومنه $x - 1 > \frac{x}{e}$ وبالتالي 3

$ex - e > x$ ومنه $ex - x > e$ إذن 3

$(e-1)x > e$ ومنه $x > \frac{e}{e-1}$ 3

$x \in]\frac{e}{e-1},+\infty[$ أو $D_2 =]\frac{e}{e-1},+\infty[$ 3

❐ فمجموعة حلول المتراجحة المطلوبة هي

$x \in D_1 \cap D_2 =]1,+\infty[\cap]\frac{e}{e-1},+\infty[=]\frac{e}{e-1},+\infty[$

$S =]\frac{e}{e-1},+\infty[$ 5/50

التمرين الرابع :

❶ عيّني مجموعة النقاط M التي يمثلها العدد العقدي z الذي يحقق العلاقة $|2iz| = 5$.

❷ حلي المعادلة الآتية (بالمجهول z) :

$z + |z| = 8 + 4i$.

الحل

❶ $|2iz| = 5$ تكافئ $|2i| \cdot |z| = 5$ ومنه $2 \cdot |z| = 5$ 4

وبالتالي $|z| = \frac{5}{2}$ فمجموعة النقاط M الممثلة للعدد 4

العقدي z تقع على دائرة مركزها $O(0,0)$ 4

ونصف قطرها $\frac{5}{2}$. 4

❷ $z + |z| = 8 + 4i$ نأخذ مرافق الطرفين فنجد 4

$\overline{z} + |z| = 8 - 4i$ بطرح العلاقتين نجد $z - \overline{z} = 8i$ 4

ومنه $2yi = 8i$ وبالتالي $\boxed{y = 4}$ نعوض في العلاقة 4

الأولى فنجد $x + 4i + \sqrt{x^2 + 16} = 8 + 4i$ 4

ومنه $\sqrt{x^2 + 16} = 8 - x$ 4

شرط الحل $8 - x \geq 0$ ومنه $x \leq 8$

نربّع الطرفين ضمن شرط الحل فنجد 4

$x^2 + 16 = (8-x)^2$ ومنه 2

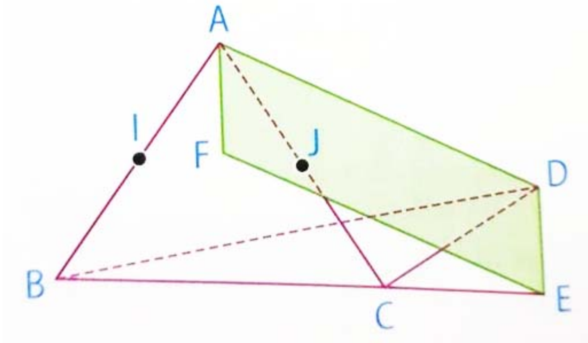
$x^2 + 16 = 64 - 16x + x^2$ وبالتالي $16x = 48$ 4

ومنه $x = 3$ وبالتالي حل المعادلة هو $\boxed{z = 3 + 4i}$ 4/50

ثالثاً: حلي كلاً من المسائل الثلاث الآتية: (80 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى :

$ABCD$ رباعي وجوه فيه I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[AC]$ و النقطتان E و F معرّفتان بالعلاقتين الشعاعيتين $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DE}$



❶ اكتبي $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{DI}$.

❷ أثبتي أنّ $\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IJ}$.

❸ أثبتي أنّ الأشعة $\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{DF}$ مرتبطة خطياً

❹ استنتجي أنّ النقاط D و I و J و F تقع في مستوٍ واحد.

الحل

❶ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DI}$. 6

❷

$$\ell_1=\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{DF}-(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})$$ 7

$$=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{DB}$$ 7

$$=\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$ 6

$$=\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\overrightarrow{IJ}=3\overrightarrow{IJ}=\ell_2$$ 6

❸ لقد أثبتنا في الطلب ❷ أنّ $\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IJ}$ ومنه

$$\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DJ})$$ 6

$$\overrightarrow{DF}-2\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{ID}+3\overrightarrow{DJ}$$ 6

$$\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{DI}+3\overrightarrow{ID}+3\overrightarrow{DJ}$$ 6

$$\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{DI}-3\overrightarrow{DI}+3\overrightarrow{DJ}$$ 6

$$\boxed{\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{DI}+3\overrightarrow{DJ}}$$

ولمّا كان الشعاعان $\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DJ}$ غير مرتبطين خطياً 6

ومن المساواة $\boxed{\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{DI}+3\overrightarrow{DJ}}$ 6

فحسب مبرهنة نجد أنّ الأشعة $\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{DF}$ مرتبطة خطياً . 6

❹ بما أنّ $\boxed{\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{DI}+3\overrightarrow{DJ}}$ فالنقاط D و I و J و F تقع في مستوٍ واحد. 6

80

المسألة الثانية :

ليكن f التابع المعرّف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\ln x-x+1$

❶ أثبتي أنّ f اشتقاقي على $I=]0,+\infty[$ واحسبي $f'(x)$.

❷ اكتبي جدول اطراد التابع f ثمّ استنتجي مجموعة حلول المتراجحة $\ln x<x-1$.

❸ باختيار $x=e^{\frac{1}{3}}$ و $x=e^{-\frac{1}{3}}$ ، احصري العدد e

الحل

❶ التابع $x\mapsto -x+1$ كثير حدود اشتقاقي على $\mathbb{R}$ فهو اشتقاقي على $I=]0,+\infty[$. 4

التابع $x\mapsto \ln x$ اشتقاقي على $I=]0,+\infty[$ حسب تعريف التابع اللوغاريتمي. 4

فالتابع f اشتقاقي على $I=]0,+\infty[$ لأنّه عبارة عن مجموع تابعين اشتقاقيين على $I=]0,+\infty[$. 4

$$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$$ 4

❷ عندما $f'(x)=0$

$1-x=0\Rightarrow x=1\ ,f(1)=0$ 4

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	0	$\searrow$	

4 4 4

$\ln x<x-1$ تكافئ $\ln x-x+1<0$ 4

وهذا يكافئ $f(x)<0$ 4

من الجدول نجد أنّ $f(x)<0$ عندما $x\in]0,+\infty[\setminus\{1\}$. 4

❸ ❐ لنعوّض $x = e^{\frac{1}{3}}$ في المتراجحة $\ln x < x-1$

فيكون $\ln e^{\frac{1}{3}} < e^{\frac{1}{3}} - 1$ ومنه 4

$\frac{1}{3} < e^{\frac{1}{3}} - 1$ ومنه $\frac{4}{3} < e^{\frac{1}{3}}$ إذن $\boxed{\frac{64}{27} < e}$ 4 4

❐ لنعوّض $x = e^{\frac{-1}{3}}$ في المتراجحة $\ln x < x-1$ 4

فيكون $\ln e^{\frac{-1}{3}} < e^{\frac{-1}{3}} - 1$ ومنه 4

$-\frac{1}{3} < e^{\frac{-1}{3}} - 1$ ومنه $\frac{2}{3} < e^{\frac{-1}{3}}$ وبالتالي $\frac{3}{2} > e^{\frac{1}{3}}$ 4 4

إذن $\boxed{\frac{27}{8} > e}$ ومنه $\boxed{\frac{64}{27} < e < \frac{27}{8}}$. 4 4

80

المسألة الثالثة :

ليكن العددان العقديان: $z_1 = -2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ و

$z_2 = -1 + i$.

❶ اكتبي z_1 و $z_1 \cdot z_2$ بالشكل الجبري.

❷ اكتبي z_1 و z_2 و $z_1 \cdot z_2$ بالشكل المثلثي.

❸ استنتجي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الحل

❶

$$z_1 = -2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$ 4

$$= 2(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$$ 4

$$= 2(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3}))$$ 4

$$= 2\cos\frac{4\pi}{3} + 2i\sin\frac{4\pi}{3} = -1 - i\sqrt{3}$$ 4

$$z_1 \cdot z_2 = (-1+i)\cdot(-1-i\sqrt{3})$$ 4

$$= 1 + i\sqrt{3} - i + \sqrt{3}$$

$$= (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$$ 4

❷

$$z_1 = -2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$= 2(-\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$$ 4

$$= 2(\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) + i\sin(\pi + \frac{\pi}{3}))$$ 4

$$= 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$$ 4

$$z_2 = -1 + i$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$ 4

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$ 4

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ 4

نلاحظ أنّ الربع الثاني $\theta \in$ ومنه $\theta = \frac{3\pi}{4}$ وبالتالي 4

$$z_2 = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$ 4

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}))$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{25\pi}{12}) + i\sin(\frac{25\pi}{12}))$$ 4

ومنه

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{25\pi}{12} - 2\pi) + i\sin(\frac{25\pi}{12} - 2\pi))$$ 4

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$$ 4

❸ بالمقارنة بين الشكل المثلثي والشكل الجبري للعدد $z_1 \cdot z_2$ نجد :

$$2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}) = (\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)$$ 4

ومنه $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = (\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}) + i(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}})$ 4

ومنه $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ و $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. 4

80

انتهى السلم