أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

① في المجال $]-\infty,0[$ يكون f مستمراً عليه

و $f(]-\infty,0[) =]1,2[$

و $0 \notin]1,2[$

فليس للمعادلة $f(x)=0$ حلول في المجال $]-\infty,0[$ 2

في المجال $]0,2[$ يكون f مستمراً متناقصاً تماماً عليه 2

و $f(]0,2[) =]-\infty,2[$

و $0 \in]-\infty,2[$

فالمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_1 يقع في المجال $]0,2[$ 2

في المجال $]2,+\infty[$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً عليه

و $f(]2,+\infty[) =]-\infty,1[$ 2

و $0 \in]-\infty,1[$

فالمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_2 يقع في المجال $]2,+\infty[$ 2

مما سبق نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حلين مختلفين على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

② $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

5 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

5 ومنه مستقيم مقارب أفقي $\boxed{y=1}$

5 $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$

5 ومنه مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=2}$

③ علماً أن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

5 و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

5 فليس للخط C مقاربات مائلة

40

السؤال الثاني:

$z^2 = 5-12i$

الحل

نفرض $z = x+yi$

$(x+yi)^2 = 5-12i$

$x^2-y^2+2xyi = 5-12i$

$\boxed{x^2-y^2=5}$

$\boxed{2xy=-12}$

علماً أن $z^2 = 5-12i$ فإن

$|z^2| = |5-12i|$

$x^2+y^2 = \sqrt{25+144}$

$\boxed{x^2+y^2=13}$

أي جميع الحلول المعادلات الثلاث الآتية:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 & (1) \\ x^2-y^2=5 & (2) \\ 2xy=-12 & (3) \end{cases}$$
5 5 5

بجمع (1) و (2) نجد: $2x^2=18$

$x^2=9$

5 إما $\boxed{x=3}$ أو $\boxed{x=-3}$

عندما $\boxed{x=3}$ نعوض في (3) فنجد:

5 $6y=-12$

5 $\boxed{y=-2}$

فالحل الأول: $\boxed{z_1=3-2i}$

عندما $\boxed{x=-3}$ نعوض في (3) فنجد:

5 $-6y=-12$

$\boxed{y=2}$

فالحل الثاني هو

5 $\boxed{z_2=-3+2i}$

50

السؤال الثالث:

$B(2,-1,2)$ و $A(4,3,-2)$

① نفرض M نقطة من محور التراتيب عندئذٍ يكون إحداثياتها من الشكل

$M(0,y,0)$ حيث $y\in\mathbb{R}$ 4

لنعين y بحيث يكون $MA=MB$

ومنه $MA^2=MB^2$ 4

$(0-2)^2+(y+1)^2+(0-2)^2=$

$(0-4)^2+(y-3)^2+(0+2)^2$

$4+y^2+2y+1+4=16+y^2-6y+9+4$ 4

$8y=20$

$y=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$ 4

ومنه $\boxed{M(0,\frac{5}{2},0)}$ 4

② معادلة الكرة التي قطرها [AB]

مركز الكرة هو منتصف القطعة المستقيمة [AB]

ومنه $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

$I\left(\frac{4+2}{2},\frac{3-1}{2},\frac{-2+2}{2}\right)$ 4

مركز الكرة: $\boxed{I(3,1,0)}$ 4

$R=\frac{AB}{2}$ (نصف قطر الكرة)

$AB=\sqrt{(4-2)^2+(3+1)^2+(-2-2)^2}$

$AB=\sqrt{4+16+16}$ 4

$AB=\sqrt{36}=6$

ومنه $\boxed{R=\frac{6}{2}=3}$ 4

معادلة الكرة المطلوبة هي:

$\boxed{(x-3)^2+(y-1)^2+z^2=9}$ 4

40

السؤال الرابع:

حل المعادلة الآتية:

$\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\frac{1}{2}\ln x$

الحل: المعادلة معرفة عندما

$2x-3>0$ و $6-x>0$ و $x>0$

5 $x>\frac{3}{2}$ و $x<6$ و $x>0$

$x\in]0,+\infty[\cap]-\infty,6[\cap]\frac{3}{2},+\infty[$

5 $\boxed{x\in]\frac{3}{2},6[}$

$\boxed{D=]\frac{3}{2},6[}$

نطبق خواص اللوغاريتم:

5 $\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\ln\sqrt{x}$

$\ln\sqrt{2x-3}=\ln\left(\frac{6-x}{\sqrt{x}}\right)$

5 $\sqrt{2x-3}=\frac{6-x}{\sqrt{x}}$

5 $\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{x}=6-x \quad x\in]\frac{3}{2},6[$

نربع الطرفين بشرط $x\in]\frac{3}{2},6[$

$(2x-3)x=(6-x)^2$

$2x^2-3x=36-12x+x^2$

$x^2+9x-36=0$

5 $(x+12)(x-3)=0$

5 إما $x+12=0\Rightarrow x=-12\notin D$ مرفوض

5 أو $x-3=0\Rightarrow\boxed{x=3}\in D$ مقبول

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2\sin 2x}{x}$$

(1) نلاحظ أنّ $\lim_{x \to 0} f(x)$

في حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالته نكتب:

3 $f(x) = x + 1 + \frac{2\sin 2x}{x}$

3 $f(x) = x + 1 + 4\,\frac{\sin 2x}{2x}$

وبما أنّ:

3 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$

إذن

3 $\lim_{x \to 0} f(x) = 5$

(2) $f(x) = x + 1 + \frac{2\sin 2x}{x}$

3 نفرض $D: y = x+1$

3 $f(x) - y_D = \frac{2\sin 2x}{x}$

3 $-1 \le \sin 2x \le 1$

3 $-2 \le 2\sin 2x \le 2$

بما أنه يهمنا جوار $+\infty$ فإذا قسمنا المتراجحة على x لا تتغير جهة المتراجحة.

3 $\frac{-2}{x} \le \frac{2\sin 2x}{x} \le \frac{2}{x}$

3 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x}\right) = 0$

نستنتج من مبرهنة الإحاطة (1) أنّ

3 $\lim_{x \to +\infty} \frac{2\sin 2x}{x} = 0$

3 ومنه $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - y_D) = 0$

وبالتالي المستقيم D الذي معادلته

4 $\boxed{y = x+1}$

مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

40

التمرين الثاني:

$$z_1 = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_2 = -1 + i$$

4 (1) $z_1 = -2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

4 $\boxed{z_1 = -1 - \sqrt{3}\, i}$

$z_1 \cdot z_2 = (-1+i)(-1-\sqrt{3}\, i)$

4 $= 1 + \sqrt{3}\, i - i + \sqrt{3}$

4 $\boxed{z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)\, i}$

4 (2) $z_1 = -2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

4 $z_1 = e^{i\pi} \cdot 2\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

$z_1 = 2\, e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}$

4 $\boxed{z_1 = 2\, e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}}$

$z_2 = -1 + i$

$r = |z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

4 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\theta \in [0, 2\pi[$ ، $\theta = \frac{3\pi}{4}$

4 $\boxed{z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}$

$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{4}\right)}$

4 $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{\frac{25\pi}{12} i}$

③ نفرض $D: y = x-1$ 5

5 $f(x) - y_D = \sqrt{(x-1)^2+4} - (x-1)$

5 $f(x) - y_D = \dfrac{(x-1)^2+4-(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+4}+(x-1)}$

5 $f(x) - y_D = \dfrac{4}{\sqrt{(x-1)^2+4}+(x-1)}$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - y_D) = 0$

5 ومنه المستقيم $D: \boxed{y = x-1}$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

لدراسة وضع C بالنسبة إلى D ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y_D = \sqrt{(x-1)^2+4} - (x-1)$

نفرض $X = (x-1)$

5 $f(x) - y_D = \sqrt{X^2+4} - X > 0$

5 لأن: $\sqrt{X^2+4} > X$

5 ومنه C يقع فوق D دوماً

60

$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{25\pi}{12} - 2\pi\right)}$

4 $\boxed{Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}}$

③ بالمقارنة بين الشكل الجبري والأسي للعدد العقدي $Z_1 \cdot Z_2$

4 $2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i$

$e^{i\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i$

4 $\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i$

ومنه

4 $\boxed{\cos\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$

4 $\boxed{\sin\frac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$

60

التمرين الثالث:

$f(x) = \sqrt{x^2-2x+5}$

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2x+5) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2)$

5 $= +\infty$

ومنه

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X} = +\infty$

②

5 $x^2-2x+5 = x^2-2x+1-1+5$

$= (x-1)^2+4$

$\boxed{f(x) = \sqrt{(x-1)^2+4}}$

التمرين الرابع:

$P(Z) = Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7$

5 ① $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7$

$= -1 - 3 - 3 + 7 = 0$

5 ② $P(Z) = (Z+1)\cdot(Z^2 + aZ + b)$

$Z^3 + aZ^2 + bZ + Z^2 + aZ + b$

5 $= Z^3 + (a+1)Z^2 + (b+a)Z + b$

بالمطابقة مع $P(Z)$ نجد:

5 $\begin{cases} a+1 = -3 & (1) \\ b+a = 3 & (2) \\ b = 7 & (3) \end{cases}$

نأخذ المعادلتين (1)، (3)

5 من (1) $\boxed{a = -4}$

5 من (3) نجد $\boxed{b = 7}$

نعوض في (2)

$7 - 4 = 3$

5 محققة $3 = 3$

ومنه $a = -4$ ، $b = 7$

$P(Z) = (Z+1)\cdot(Z^2 - 4Z + 7)$

③ نحل $P(Z) = 0$

5 $(Z+1)\cdot(Z^2 - 4Z + 7) = 0$

5 إما $Z + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{Z = -1}$

أو $Z^2 - 4Z + 7 = 0$

5 $D = 16 - 4(1)(7)$

$= 16 - 28 = -12 < 0$

للمعادلة حلان في C: $\sqrt{-D} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

5 $Z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{-D}\, i}{2a} = \dfrac{4 + 2\sqrt{3}\, i}{2}$

$\boxed{Z_1 = 2 + \sqrt{3}\, i}$

5 $\boxed{Z_2 = \overline{Z_1} = 2 - \sqrt{3}\, i}$

مجموعة حلول المعادلة المفروضة هي:

$\{-1, 2+\sqrt{3}\, i, 2-\sqrt{3}\, i\}$

60 ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

① النقطة K تحقق $\overrightarrow{CK} = 0.6\, \overrightarrow{CD}$

نفرض $K(x, y, z)$

5 $(x, y, z-5) = \frac{3}{5}(5, 5, -5)$

$(x, y, z-5) = (3, 3, -3)$

5 $\begin{cases} x = 3 & (1) \\ y = 3 & (2) \\ z - 5 = -3 & (3) \end{cases}$

5 ومنه $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

$\boxed{K(3, 3, 2)}$

النقطة L تحقق

$\overrightarrow{BA} = 7\, \overrightarrow{BL}$

5 $(7, -7, -7) = 7(x-0, y-4, z-7)$

ومنه $(1, -1, -1) = (x, y-4, z-7)$

5 $\boxed{x = 1}$ ، $y - 4 = -1 \Rightarrow \boxed{y = 3}$

$z - 7 = -1 \Rightarrow \boxed{z = 6}$

5 $\boxed{L(1, 3, 6)}$

$\overrightarrow{LG}\left(\frac{1}{2} , 0 , -1\right)$ 5

$\overrightarrow{LK}(2 , 0 , -4)$ 5

نلاحظ أن

$\overrightarrow{LK} = 4\overrightarrow{LG}$ 5

فالشعاعان $\overrightarrow{LG}$ و $\overrightarrow{LK}$ مرتبطان خطياً ، فالنقاط L و G و K تقع على استقامة واحدة . 5

(2) $\overrightarrow{AD}(-2 , 8 , 0)$ 5

$\overrightarrow{AC}(-7 , 3 , 5)$ 5

$\overrightarrow{AG}\left(-\frac{11}{2} , 6 , 5\right)$ 5

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{-2}{-7} \neq \frac{8}{3}\right)$ 5

وحتى تكون الأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AG}$ مرتبطة خطياً يجب أن نجد عددين حقيقيين α و β يحققان :

$\overrightarrow{AG} = \alpha\overrightarrow{AD} + \beta\overrightarrow{AC}$ 5

$$\begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\alpha - 7\beta = -\frac{11}{2} & (1) \\ 8\alpha + 3\beta = 6 & (2) \\ 5\beta = 5 & (3) \end{cases}$$ 5

لنأخذ المعادلتين (1) و (2) و (3)

من (3) نجد أن $\boxed{\beta = 1}$ 5

نعوض في (2)

$8\alpha + 3 = 6$

$8\alpha = 3$

$\boxed{\alpha = \frac{3}{8}}$ 5

نتحقق بالتعويض في (1)

$-2\left(\frac{3}{8}\right) - 7(1) =$

$-\frac{3}{4} - 7 = -\frac{31}{4} \neq -\frac{11}{2}$ 5

فالأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AG}$ غير مرتبطة خطياً .

ونستنتج بأن النقاط A و D و C و G لا تقع في مستوٍ واحد 5

100

المسألة الثانية:

ليكن f تابعاً معرفاً على $D_f =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$$

(1) الشرط الأول: أياً كان $x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

5 يكون $-x\in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

فالشرط (1) محقق وضوحاً.

الشرط الثاني: أياً كان $x\in D_f$: $f(-x)=-f(x)$

5 $f(-x)=\ln\left(\frac{-x-2}{-x+2}\right)$

5 $=\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

5 $=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{-1}$

5 $=-\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=-f(x)$

فالشرط (2) محقق

ومنه f تابع فردي.

5 وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات

(2) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=1$

5 ومنه $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\ln 1=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=1$

5 ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln 1=0$

5 وبالتالي المستقيم $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي للخط C

5 $\lim_{x\to(-2)^-}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=+\infty$

5 ومنه $\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=\lim_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$

5 ومنه $\boxed{x=-2}$ مستقيم مقارب شاقولي

5 $\lim_{x\to2^+}\left(\frac{x-2}{x+2}\right)=0$

5 ومنه $\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{X\to0}\ln X=-\infty$

5 ومنه $\boxed{x=2}$ مستقيم مقارب شاقولي.

(3) f اشتقاقي على $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$

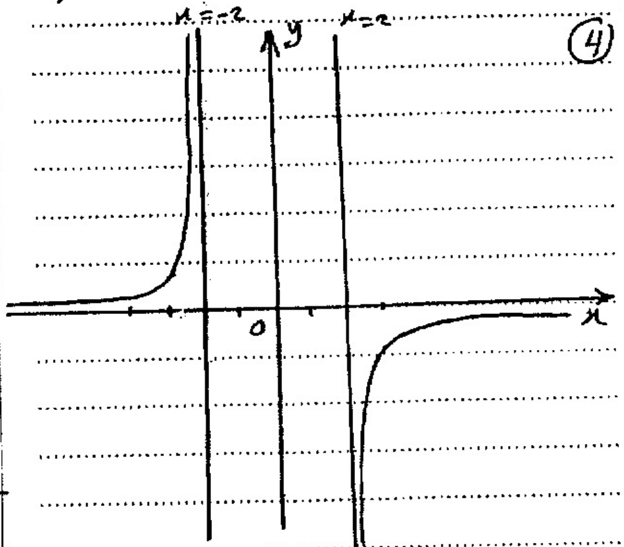
5 $f'(x)=\dfrac{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)'}{\frac{x-2}{x+2}}$

5 $f'(x)=\dfrac{\frac{1(x+2)-1(x-2)}{(x+2)^2}}{\frac{x-2}{x+2}}$

5 $f'(x)=\dfrac{4}{(x-2)(x+2)}>0$

ومنه f متزايد تماماً على كل من مجالي D_f.

(4)



5 + 5

100

انتهى السلم

ملاحظة: إذا اتبع الطالب طريقة صحيحة لم ترد في السلم يوزع المصحح درجة السؤال على هذه الطريقة.