أولاً: أجيبي عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول:

(1)

5 ومنه $\lim_{x\to-\infty} \left(f(x)-(-x-1)\right)=0$

5 ومنه المستقيم $\Delta: \boxed{y=-x-1}$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ ،

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

5 $\boxed{x=3}$ مستقيم مقارب شاقولي

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

5 ومنه $\boxed{y=1}$ مستقيم مقارب أفقي

(2)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
5 $f'(x)$		$-$	‖	$-$	
5 $f(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

40 السؤال الثاني:

$u=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

5 (1) $r=|u|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

5 $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{2}$ ، $\theta \in$ (1ر

5 $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\theta=\frac{\pi}{3}$

5 $\boxed{u=e^{i\frac{\pi}{3}}}$

5 (2) $u^3=e^{i\pi}=-1$

(3)

5 $u^4=u^3\cdot u=-u$

ومنه $\boxed{u^4=-u}$

5 $u^5=u^3u^2=-u^2$

$u^6=(u^3)^2=(-1)^2=1$

5 $u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6$

$=u+u^2-1-u-u^2+1=0$

محقق

40 درس

السؤال الثالث:

K منتصف [CD] ومنه:

$K\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-2-4}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

3 $\boxed{K(3, -3, 3)}$

J نقطة تحقق $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$

نفرض $J(x, y, z)$

3 $(x-3, y-2, z+4) = \frac{1}{4}(-2, -6, 6)$

$(x-3, y-2, z+4) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3 $x-3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}}$

$y-2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}}$

$z+4 = \frac{3}{2} \Rightarrow z = -4+\frac{3}{2}$

$\boxed{z = \frac{-5}{2}}$

3 $\boxed{J\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)}$

(2)

3 $\vec{KJ}\left(\frac{-1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{-11}{2}\right)$

نلاحظ أن الشعاعين

$\vec{v}(3, -1, -3)$ و $\vec{u}(1, -2, 2)$

غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما

3 غير متناسبة ($\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{-2}$)

وحتى تكون الأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{KJ}$

مرتبطة خطياً يجب أن يوجد عددين حقيقيين

α و β يحققان

3 $\vec{KJ} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

3 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{11}{2}\right) = \alpha(1, -2, 2) + \beta(3, -1, -3)$

3
$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = -\frac{1}{2} & (1) \\ -2\alpha - \beta = \frac{7}{2} & (2) \\ 2\alpha - 3\beta = -\frac{11}{2} & (3) \end{cases}$$

لنأخذ المعادلتين (2) و (3)

بالجمع نجد: $-4\beta = -2$

3 $\boxed{\beta = \frac{1}{2}}$

نعوض في (2)

$-2\alpha - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$-2\alpha = 4$

3 $\boxed{\alpha = -2}$

نتحقق بالتعويض في المعادلة (1) فنجد

3 $-2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

محققة

4 فالأشعة $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{KJ}$ مرتبطة خطياً

40

السؤال الرابع:

$g(x) = \ln\frac{1}{x}$ و $f(x) = (\ln x)^2$

4 (1) $f(x) - g(x) = (\ln x)^2 - \ln\frac{1}{x}$

$= (\ln x)^2 + \ln x$

4 $= (\ln x)(\ln x + 1)$

(2) (a $f(x) - g(x) < 0$

4 $(\ln x)(\ln x + 1) < 0$

المتراجحة معرفة عندما $x \in]0, +\infty[$

$(\ln x)(\ln x + 1) = 0$

4 إما $\ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

أو $\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$

4 $\boxed{x = \frac{1}{e}}$

7

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة	‖	///		محققة		///	

حسب التالي حلول المتراجحة $f(x)-g(x)<0$

4 عندما $x\in\,]\frac{1}{e},1[$

b) من الطلب السابق نستنتج:

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
4 $f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
4 الوضع النسبي		C_f يقع فوق C_g		C_f يقع تحت C_g		C_f يقع فوق C_g	

وهنا لدينا نقطتان مشتركتان بين C_f و C_g

عند $x=\frac{1}{e}$ و $x=1$

4 أي $(\frac{1}{e},1)$ و $(1,0)$

نقطتان مشتركتان بين C_f و C_g

40 ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$$f(x)=1-\frac{2}{x}+\frac{x}{2}$$

① f معرفة على $]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$

5 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

5 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

5 $\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$

5 $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

5 $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي.

5 ② $f(x)=\frac{1}{2}x+1-\frac{2}{x}$

5 نفرض $\Delta: y=\frac{1}{2}x+1$

5 $f(x)-y_\Delta=\frac{-2}{x}$

5 $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$

5 ومنه فالمستقيم Δ الذي معادلته $\boxed{y=\frac{1}{2}x+1}$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

لدراسة وضع C بالنسبة إلى Δ ندرس إشارة الفرق

$f(x)-y_\Delta=\frac{-2}{x}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
5 $f(x)-y_\Delta$		$+$	||	$-$	
5 الوضع النسبي		C يقع فوق Δ	||	C يقع تحت Δ	

60 التمرين الثاني:

$$(1-i)z^2-2\sqrt{3}\,z+2+2i=0$$

4 ① $\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4(1-i)(2+2i)$

$\Delta=12-4(2)(1-i)(1+i)$

$\Delta=12-8(2)$

$\Delta=12-16=-4<0$

4 $\sqrt{-\Delta}=\sqrt{4}=2$

4 $z_1=\frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2(1-i)}$

4 $\boxed{z_1=\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}}$

4 $z_1=\frac{(\sqrt{3}+i)(1+i)}{1+1}$

$z_1=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i+i-1}{2}$

4 $\boxed{z_1=\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i}$

$z_2=\frac{-b-\sqrt{-\Delta}\,i}{2a}=\frac{2\sqrt{3}-2i}{2(1-i)}$

+2 $\boxed{z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(2) $Z_A = Z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

ومنه نجد أن Z_A بالشكل الجبري هو

4 $Z_A = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} i$

كتابة Z_A بالشكل المثلثي:

$Z_A = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$

نفرض $w_1 = \sqrt{3}+i$

4 $r = |w_1| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

4 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$ ؛ $\theta \in$ (الربع الأول) ، $\theta = \frac{\pi}{6}$

$w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

نفرض $w_2 = 1-i$

$r = |w_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

4 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ؛ $\theta \in$ (الربع الرابع) ، $\theta = -\frac{\pi}{4}$

4 $w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$Z_A = \frac{w_1}{w_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

4 $Z_A = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

بالمقارنة بين الشكل الجبري والمثلثي للعدد Z_A:

4 $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2} i$

$\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

4 ومنه $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

60

التمرين الثالث:

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x \neq 0 \\ m & ; x = 0 \end{cases}$

(1) f مستمر على $\mathbb{R}^*$ ولكي يكون f مستمراً على $\mathbb{R}$ يجب أن يكون f مستمراً عند 0 أي يجب تحقق

5 $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

عندما $x \neq 0$ يكون

$f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

نلاحظ أن $\lim_{x\to 0} f(x)$ هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لذلك نكتب:

(نضرب بالمرافق ونقسم عليه)

5 $f(x) = \frac{\sin^2 x \,(\sqrt{x^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}$

5 $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}\,(\sqrt{x^2+1}+1)$

5 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 (\sqrt{x^2+1}+1)$

5 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ لأن ؛ $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2+1}+1) = 2$ و

5 $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ ف

$f(0) = m$ عندما $x = 0$ يكون

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$2 = m$

5 ومنه $m = 2$

② حساب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

5 $0 \le \sin^2 x \le 1$

$(\sqrt{x^2+1}-1)>0$ فإذا قسمنا المتراجحة السابقة على $(\sqrt{x^2+1}-1)$ لا تتغير جهة التراجح

5 $0 \le \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x^2+1}-1} \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-1}\right)=0$ لكن

لكن استناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1)

نجد أن

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x^2+1}-1}\right)=0$

5 أي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

60

التمرين الرابع:

① بفرض $Z=\dfrac{w\bar z - z}{iw-i}$

يكون Z تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان

$\bar Z = -Z$

4 $l_1 = \bar Z = \dfrac{\bar w z - \bar z}{-i\bar w + i}$

4 لكن $|w|=1$ لذا $\bar w = \frac{1}{w}$

4 $l_1 = \bar Z = \dfrac{\frac{z}{w}-\bar z}{\frac{-i}{w}+i}$

4 $\bar Z = \dfrac{z - w\bar z}{-i+iw}$

4 $\bar Z = -\dfrac{(w\bar z - z)}{iw-i} = -Z$

4 أصبح لدينا $\bar Z = -Z$

وبالتالي Z تخيلي بحت

② لدينا فرضاً

$\dfrac{w\bar z - z}{iw-i}$ تخيلي بحت

ومنه مرافقه يساوي معاكسه

4 $\overline{\left(\dfrac{w\bar z - z}{iw-i}\right)} = -\left(\dfrac{w\bar z - z}{iw-i}\right)$

4 $\dfrac{\bar w z - \bar z}{-i\bar w + i} = \dfrac{-w\bar z + z}{iw-i}$

4 $(\bar w z - \bar z)(iw-i) = (-i\bar w + i)(-w\bar z + z)$

نقسم طرفي المساواة على i

4 $(\bar w z - \bar z)(w-1) = (-\bar w+1)(-w\bar z + z)$

$\bar w w z - \cancel{\bar w z} - \bar z w + \bar z =$

4 $w\bar w \bar z - \cancel{\bar w z} - w\bar z + z$

$w\bar w z - w\bar w \bar z + \bar z - z = 0$

4 $w\bar w(z-\bar z) + (\bar z - z) = 0$

$w\bar w(z-\bar z) - (z-\bar z)=0$

4 $(z-\bar z)(w\bar w - 1)=0$

إما $z-\bar z=0$

1 ومنه $\boxed{\bar z = z}$

ومنه z حقيقي

أو $w\bar w - 1 = 0$

$w\bar w = 1$

1 $|w|^2=1 \Rightarrow \boxed{|w|=1}$

0

المسألة الثانية:

لتكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$

① f مستمر وقابل للاشتقاق على $]0,+\infty[$

5 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

5 ومنه C يقبل مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=0}$ (منطبق على $y'y$)

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{1}{2}$ فإن

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$

5 وبالتالي $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

5 $f'(x) = 1 + \dfrac{\frac{1(2x+1)-2x}{(2x+1)^2}}{\frac{x}{2x+1}}$

5 $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x(2x+1)} > 0$

عندما $x \in]0,+\infty[$

x	0	$+\infty$
5 $f'(x)$	‖	$+$
5 $f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

② 5 $f(x) - y_d = \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) + \ln 2$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - y_d\right) = -\ln 2 + \ln 2 = 0$

5 ومنه فالمستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

③ لدراسة وضع (C) بالنسبة إلى d ندرس إشارة الفرق:

$$f(x) - y_d = \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right) + \ln 2$$

5 $= \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

وبما أن $2x < 2x+1$ أياً كان $x \in]0,+\infty[$

5 فإن $0 < \frac{2x}{2x+1} < 1$

5 ومنه $\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) < 0$

أي $f(x) - y_d < 0$

ومنه C يقع تحت d على المجال $]0,+\infty[$

④ 5 f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$

إذن يكفي أن نثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً

5 وبما أن $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$

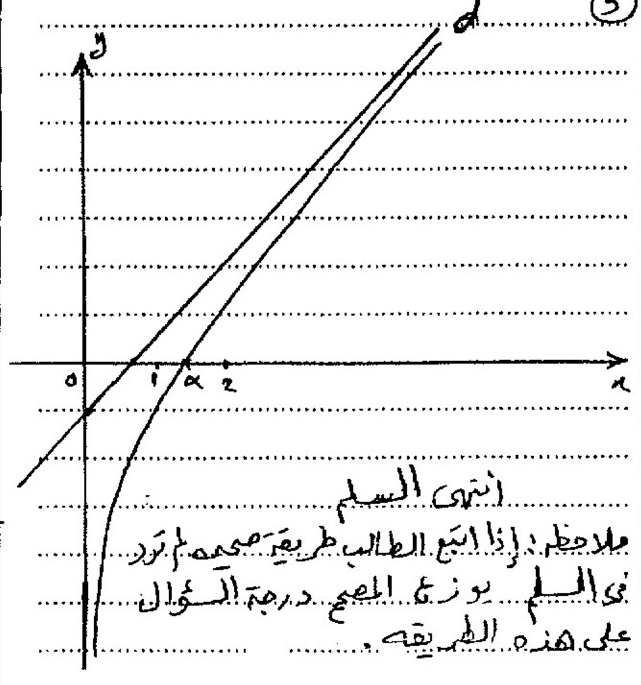
$f(2) = 2 + \ln\left(\frac{2}{5}\right)$

5 $f(2) = 2 + \ln 2 - \ln 5 > 0$

فإن $f(1)\cdot f(2) < 0$ ومنه

5 للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد (α) ينتمي للمجال $]1,2[$

⑤ 5 + 5



انتهى السلم

50

ملاحظة: إذا اتبع الطالب طريقة صحيحة لم ترد في السلم يوزع المصحح درجة السؤال على هذه الطريقة.