أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

5 ① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

5 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

5 ومنه مستقيم مقارب أفقي $\boxed{y=3}$

5 ② للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد هو $x=1$

③ $g(x) = \ln(f(x))$

5 ومعرف عندما يكون $f(x) > 0$

5 وهذا يتحقق عندما $x \in]1,+\infty[$

④ لحساب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

نفرض $t = f(x)$

5 فيكون $f(f(x)) = f(t)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

5 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to 3} f(t) = 5$

40

السؤال الثاني:

$(E):\ z^2 - 6z + 12 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(12)$

$= 36 - 48 = -12 < 0$

4 للمعادلة جذران في $\mathbb{C}$

$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

4 إما $z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a}$

$= \frac{6 + 2\sqrt{3}\, i}{2}$

4 $\boxed{z_1 = 3 + \sqrt{3}\, i}$

4 $\boxed{z_2 = \overline{z_1} = 3 - \sqrt{3}\, i}$

$z_1 = 3 + \sqrt{3}\, i$

4 $r = |z_1| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

4 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\theta \in [0, 2\pi[$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$

4 $\boxed{z_1 = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}}}$

4 $\boxed{z_2 = \overline{z_1} = 2\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}}$

4 ② $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 \cdot z_2}$

4 $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

40

السؤال الثالث:

$A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$

4 ① $\overrightarrow{AB}(-2, 0, -1)$

4 $\overrightarrow{AC}(0, -1, -3)$

4 نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}\right)$

4 فالنقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة.

4 ② $\overrightarrow{AM}(m-3, -1, 2)$

حتى تقع النقطة M في المستوي (ABC) يكفي أن نبرهن أن $\overrightarrow{AM}$ $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً

4 لذلك نبحث عن عددين ~~حقيقيين~~ حقيقيين α، β يحققان

$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$

4 $\begin{pmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} m-3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ -\beta \\ -\alpha - 3\beta \end{pmatrix}$

4 $\begin{cases} m-3=-2\alpha & (1)\\ -1=-\beta & (2)\\ 2=-\alpha-3\beta & (3)\end{cases}$

2 من (2) $\boxed{\beta=1}$ نعوض في (3)

$2=-\alpha-3(1)$

$\alpha=-2-3$

2 $\boxed{\alpha=-5}$

نعوض في المعادلة (1)

$m-3=-2(-5)$

$m-3=10$

4 $\boxed{m=13}$

وهي قيمة m التي تجعل النقطة M تقع في مستوي (ABC).

40 **السؤال الرابع:**

$\ln(x+2)+\ln(2-x)\leq \ln(-3x)$

نوجد مجموعة تعريف المتراجحة أولاً:

$x+2>0$ و $2-x>0$ و $-3x>0$

$x>-2$ و $x<2$ و $x<0$

$x\in]-2,+\infty[\cap]-\infty,2[\cap]-\infty,0[$

5 $x\in]-2,0[$

$\boxed{D_1=]-2,0[}$

نطبق خواص اللوغاريتم:

5 $\ln\big((x+2)\cdot(2-x)\big)\leq \ln(-3x)$

$\ln(4-x^2)\leq \ln(-3x)$

5 $4-x^2\leq -3x$

$x^2-3x-4\geq 0$

5 $(x-4)(x+1)\geq 0$

5 $x\in]-\infty,-1]\cup[4,+\infty[$

5 ومنه $\boxed{D_2=]-\infty,-1]\cup[4,+\infty[}$

مجموعة حلول المتراجحة هي

$x\in D_1\cap D_2$

5 $x\in\big(]-2,0[\big)\cap\big(]-\infty,-1]\cup[4,+\infty[\big)$

$x\in]-2,-1]$

5 $\boxed{S=]-2,-1]}$

40 **ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:**

التمرين الأول:

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

4 ① $\lim_{x\to+\infty}(x^2+4x+5)=+\infty$

4 ومنه $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

② $\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}$

4 نلاحظ أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ هي حالة

عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ نزيل التعيين كما يلي:

$\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}$

4 $=\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$

$=\frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$

علماً أن x في جوار $+\infty$ فإن $|x|=x$

4 $\frac{f(x)}{x}=\frac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{\cancel{x}}$

4 $\frac{f(x)}{x}=\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1=a$

4 $f(x)-ax = f(x)-x$

4 $f(x)-x = \sqrt{x^2+4x+5}-x$

نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

الحالة عدم تعيين من شكل $+\infty-\infty$

لإزالتها نضرب بالمرافق ونقسم عليه

4 $f(x)-x = \dfrac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}+x}$

4 $f(x)-x = \dfrac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+x}$

4 $f(x)-x = \dfrac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+x}$

عندما x تؤول إلى $+\infty$ فإن $|x|=x$

4 $f(x)-x = \dfrac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \dfrac{4}{2} = 2 = b$

③ لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1 = a$

4 و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = 2 = b$

4 إذن المستقيم D الذي معادلته $\boxed{y = x+2}$

مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

60

التمرين الثاني:

① نفرض $w = \sqrt{3}+i$

5 $r = |w| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

5 $\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\theta \in$ (الربع الأول)

5 $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{1}{2}$ ، $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

5 $\boxed{w = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$

$\overline{w} = \sqrt{3}-i$

5 $\boxed{\overline{w} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$

$w^7 = 2^7\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

5 $w^7 = 128\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)$

5 $\boxed{w^7 = -64\sqrt{3}-64i}$

5 $(\sqrt{3}-i)^7 = \left(\overline{w^7}\right) = -64\sqrt{3}+64i$

5 $Z = (\sqrt{3}+i)^7-(\sqrt{3}-i)^7$

$= -64\sqrt{3}-64i-(-64\sqrt{3}+64i)$

5 $= \boxed{-128i}$

② $Z = \dfrac{(1-2\sqrt{3}i)^8}{(5+12i)^3}$

5 $|Z| = \dfrac{|1-2\sqrt{3}i|^8}{|5+12i|^3} = \dfrac{\left(\sqrt{1+12}\right)^8}{\left(\sqrt{25+144}\right)^3} = \dfrac{(\sqrt{13})^8}{(13)^3}$

5 $|Z| = \dfrac{13^4}{13^3} = 13$

60

١٤

التمرين الثالث:

$$f(x) = \frac{\cos 4x - 1}{x^2}$$

① نلاحظ أنّ $\lim_{x \to 0} f(x)$

هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

لذلك نكتب:

$$f(x) = \frac{-(1-\cos 4x)}{x^2}$$ 6

$$f(x) = \frac{-2\sin^2 2x}{x^2}$$ 6

$$f(x) = -2\left(2\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2$$ 6

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{X \to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$ 6

ومنه

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -2(2)^2 = -8$$ 6

② لحساب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$$-1 \le \cos 4x \le 1$$ 6

$$-2 \le \cos 4x - 1 \le 0$$ 6

نقسم طرفي المتراجحة على x^2

فنجد:

$$\frac{-2}{x^2} \le \frac{\cos 4x - 1}{x^2} \le 0$$ 6

بما أنّ $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{-2}{x^2}\right) = 0$ 6

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد

أنّ $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos 4x - 1}{x^2} = 0$ 6

أي $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

60

التمرين الرابع:

$$Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}\, i$$

$$Z_2 = 1 + i$$

① $$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}\, i}{1 + i}$$

نضرب البسط والمقام بمرافق المقام

$$Z = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}\, i)(1 - i)}{(1+i)(1-i)}$$ 3

$$Z = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i + \sqrt{6}\, i + \sqrt{6}}{1+1}$$ 3

$$Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\, i$$

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\, i}$$ 3

② $$Z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{6}\, i$$

$$r = |Z_1| = \sqrt{2 + 6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$ 3

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$ 3

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ 3

$\theta \in$ الربع الأول، $\theta = \frac{\pi}{3}$

ومنه $$\boxed{Z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$ 3

$$Z_2 = 1 + i$$

$$r = |Z_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$ 3

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ 3

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$ 3

$\theta \in$ الربع الأول، $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\boxed{Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$$ 3

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\boxed{Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$$ 3

بالمقارنة بين الشكل المثلثي والشكل الجبري للعدد العقدي Z نجد

3 $z\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt6-\sqrt2}{2}i$

3 $\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}+\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}i$

3 ومنه $\boxed{\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}}$

③

3 $Z_1+Z_2=-\frac{P}{1}=-P$

$2e^{i\frac{\pi}{12}}+2e^{-i\frac{\pi}{12}}=-P$

$2\left(e^{i\frac{\pi}{12}}+e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)=-P$

حسب دستور أولر

3 $2\left(2\cos\frac{\pi}{12}\right)=-P$

3 ومنه $P=-4\cos\frac{\pi}{12}$

3 $\boxed{P=-\sqrt6-\sqrt2}$

$Z_1\cdot Z_2=\frac{q}{1}=q$

$2e^{i\frac{\pi}{12}}\cdot 2e^{-i\frac{\pi}{12}}=q$

3 ومنه $\boxed{q=4}$

60 ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

8 ① $H(0,0,1)$ ، $D(0,0,0)$

8 $E(1,0,1)$ ، $A(1,0,0)$

8 $F(1,1,1)$ ، $B(1,1,0)$

8 $G(0,1,1)$ ، $C(0,1,0)$

4 $I\left(0,\frac34,1\right)$

4 $K\left(\frac14,0,1\right)$

4 ② $\overrightarrow{KA}\left(\frac34,0,-1\right)$

4 $\overrightarrow{ID}\left(0,-\frac34,-1\right)$

4 $\overrightarrow{IB}\left(1,\frac14,-1\right)$

نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{ID}$ غير مرتبطين خطياً

4 لأن مركباتهما غير متناسبة

$(1\neq 0)$

وحتى تكون الأشعة المفروضة مرتبطة خطياً نبحث عن عددين حقيقيين α و β تحققان

4 $\overrightarrow{KA}=\alpha\overrightarrow{ID}+\beta\overrightarrow{IB}$

$$\begin{pmatrix}\frac34\\0\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0\\-\frac34\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\\frac14\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\beta=\frac34 & (1)\\ -\frac34\alpha+\frac14\beta=0 & (2)\\ -\alpha-\beta=-1 & (3)\end{cases}$$

لنأخذ المعادلتين (1) و (3)

4 $\boxed{\beta=\frac34}$ من (1) نجد

نعوض في (3)

$-\alpha-\frac34=-1$

4 $\boxed{\alpha=\frac14}$

نتحقق بالتعويض في (2)

4 $-\frac34\left(\frac14\right)+\frac14\left(\frac34\right)=-\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=0$

ومنه $\overrightarrow{KA}=\frac14\overrightarrow{ID}+\frac34\overrightarrow{IB}$

4 فالأشعة $\overrightarrow{KA}$ و $\overrightarrow{ID}$ و $\overrightarrow{IB}$ مرتبطة خطياً

4 ومنه فالمستقيم (KA) يوازي المستوي (IBD)

③ $\overrightarrow{CP}=\frac12\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac12\overrightarrow{AD}$

4 $\overrightarrow{CP}=\frac12\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AB}$

4 $\overrightarrow{CP}=\frac12\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BA}$

4 $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO_1}$

4 حيث O_1 مركز المربع $ADHE$

$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CO_1}$

4 ومنه $P=O_1$

100

المسألة الثانية:

$f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$

① $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$ 4

ومنه $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي (منطبق على yy') 4

عند $+\infty$: $f(x)=1+\frac{\ln x}{x}$ 4

لما كان $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ 4

فإن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ 4

ومنه فالمستقيم $D:\boxed{y=1}$ مستقيم مقارب يوازي ... 4

لدراسة وضع C بالنسبة إلى مقاربه $D: y=1$ ندرس إشارة الفرق

$f(x)-y_D=\frac{\ln x}{x}$ 4

حيث $f(x)-y_D=0$ عندما $\ln x=0$

ومنه $\boxed{x=1}$ 4

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-y_D$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	D يقع فوق C	نقطة تقاطع بين D و C $(1,1)$	C يقع فوق D

4
4

② f مستمر وقابل للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$

$f(x)=1+\frac{\ln x}{x}$

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ 4

$f'(x)=0$ عندما $1-\ln x=0$ 4

$\ln x=1$

ومنه $\boxed{x=e}$

$f(e)=\frac{e+1}{e}$ 4

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$\frac{e+1}{e}$	$\searrow 1$

4
4
4

③ في المجال $]0,e]$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً عليه 4 4

و $0\in f(]0,e])=]-\infty,\frac{e+1}{e}]$

فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α في المجال $]0,e]$ 4

في المجال $]e,+\infty[$ يكون f مستمراً عليه

و $0\notin f(]e,+\infty[)=]1,\frac{e+1}{e}[$ 4

فليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $]e,+\infty[$ 4

وبالتالي نستنتج أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد يقع في المجال $]0,e]$

إثبات أن $\alpha\in]0,1[$

$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$

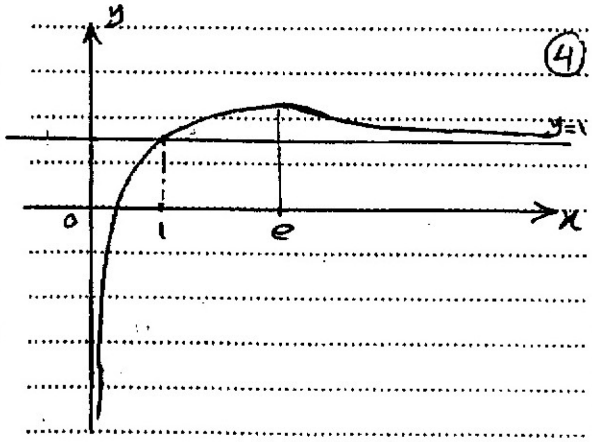
$f(1)=1$

f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,1[$

و $0\in f(]0,1[)=]-\infty,1[$ 4

فالمعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد α يقع في المجال $]0,1[$. 4

④



4
4

100

انتهى السلم

ملاحظة: إذا اتبع الطالب طريقة صحيحة لم ترد في السلم يوزع المصحح علامة السؤال على هذه الطريقة