أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية

السؤال الأول:

(1) f معرف على $]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

3 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$

3 ومنه مستقيم مقارب أفقي $\boxed{y=2}$

3 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

3 ومنه مستقيم مقارب أفقي $\boxed{y=1}$

3 $\lim_{x\to1^-} f(x)=2$

3 $\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$

ومنه

3 مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=1}$

3 (2) بما أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

فليس للخط C مستقيم مقارب مائل

2 في جوار $+\infty$ أو $-\infty$.

(3) في المجال $]-\infty,1[$ يكون f مستمراً عليه

و $f(]-\infty,1[)=]2,5]$

2 و $0\notin]2,5]$

2 فليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $]-\infty,1[$

2 في المجال $]1,+\infty[$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً

عليه و $f(]1,+\infty[)=]-\infty,1[$

2 و $0\in]-\infty,1[$

2 فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد يقع في المجال

$]1,+\infty[$.

(4) نلاحظ من جدول تغيرات التابع f

أن مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\le1$

2+2 هي $x\in]1,+\infty[\cup\{0\}$

40

السؤال الثاني:

$Z_1=1-i$ و $Z_2=-2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$Z_2=-2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

5 $Z_2=2e^{i\pi}e^{i\frac{4\pi}{3}}=2e^{i\frac{7\pi}{3}}$

5 $Z_2=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

5 $Z_1=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$Z_1\cdot Z_2=2\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$

5 $Z_1\cdot Z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$Z_2=-2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}}=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

5 $Z_2=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$Z_2=2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$

5 $Z_2=1+i\sqrt{3}$

$Z_1\cdot Z_2=(1-i)(1+\sqrt{3}i)$

5 $Z_1\cdot Z_2=(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)$

$2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}=Z_1\cdot Z_2$

$2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=(1+\sqrt{3})+i(\sqrt{3}-1)$

ومنه

5 $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

40

السؤال الثالث:

(1)

10 $x^2+y^2-\frac{4}{36}z^2=0$

5 مع $0\le z\le6$

② إن المثلثين OHM و OAK متشابهان

5 $\frac{OH}{OA} = \frac{HM}{AK} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{HM}{2}$

5 ومنه $\boxed{HM = \frac{4}{3}}$ نصف قطر الأسطوانة

5 $OH = \frac{2}{3} OA \Rightarrow OH = \frac{2}{3}(6) = 4$

معادلة الأسطوانة المطلوبة هي:

5+5 $4 \le z \le 6$ مع $x^2+y^2 = \frac{16}{9}$

40

السؤال الرابع:

$f(x) = \frac{-4x+2}{x+4}$

4 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -4$

$f(x) \in]-4.05, -3.95[$

هذا يعني

4 $|f(x)-(-4)| < 0.05$

$|f(x)+4| < \frac{5}{100}$

4 $\left|\frac{-4x+2}{x+4}+4\right| < \frac{1}{20}$

4 $\frac{18}{|x+4|} < \frac{1}{20}$

4 $\frac{|x+4|}{18} > 20$

$|x+4| > 360$

بما أن x في جوار $+\infty$ فإن

$|x+4| = x+4$

4 $x+4 > 360$

$x > 356$

4 ومنه $\boxed{A = 356}$

② لحساب $\lim_{x\to+\infty} f(f(x))$

4 نفرض $t = f(x) = \frac{-4x+2}{x+4}$

4 فيكون $f(f(x)) = f(t)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -4$

4 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to(-4)^+} f(t)$

$= +\infty$

40

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$f(x) = \frac{x^3+2x^2+\cos x - 1}{x^2}$

① $f(x) = x+2+\frac{\cos x - 1}{x^2}$

نلاحظ أن نهاية التابع f عند 0 هي حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لذا نكتب:

5 $f(x) = x+2-\frac{1-\cos x}{x^2}$

5 $f(x)=x+2-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

5 $f(x) = x+2-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$

5 $f(x)=x+2-2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2$

5 وبما أن $\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{X\to0}\frac{\sin X}{X}=1$

5 فإن $\lim_{x\to0} f(x) = 2-2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$

5 ② $f(x)-y = \frac{\cos x-1}{x^2}$

5 $-1\le\cos x\le1$

5 $-2\le\cos x - 1\le 0$

ومنه ÷ $x^2>0$

5 $\frac{-2}{x^2}\le\frac{\cos x-1}{x^2}\le 0$

5 بما أن $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2}{x^2}\right) = 0$

فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) فإن

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x-1}{x^2}=0$

5 أي $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y)=0$

فالمستقيم Δ الذي معادلته $y=x+2$

مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

60

التمرين الثاني:

$z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0$

① نعوض $z = 2i$ في المعادلة (E)

$(2i)^4 - 4(2i)^3 + 9(2i)^2 - 16(2i) + 20 =$

4 $16 + 32i - 36 - 32i + 20 = 0$

ومنه $\boxed{z=2i}$ حل للمعادلة (E)

وبما أن المعادلة (E) بأمثال حقيقية

4 فإن $z=-2i$ أيضاً جذر للمعادلة E

4 فكثير الحدود المفروض يقبل القسمة على $(z-2i)$

4 وأيضاً يقبل القسمة على $(z+2i)$

وهو يقبل القسمة على $(z+2i)\cdot(z-2i)$

أي يقبل القسمة على (z^2-4i^2)

4 أي يقبل القسمة على (z^2+4)

$$\begin{array}{r|l} & z^2-4z+5 \\ \hline z^2+4 & z^4-4z^3+9z^2-16z+20 \\ & \mp z^4 \mp 4z^2 \\ \hline & -4z^3+5z^2-16z+20 \\ & \pm 4z^3 \pm 16z \\ \hline & 5z^2+20 \\ & \mp 5z^2 \mp 20 \\ \hline & 0 \end{array}$$

4 ومنه المعادلة (E) تكافئ:

4 $(z^2+4)\cdot(z^2-4z+5)=0$

إما $z^2+4=0$

$z^2=-4$

$z^2=4i^2$

إما $\boxed{z_1=2i}$ أو $\boxed{z_2=-2i}$

أو $z^2-4z+5=0$

$\Delta = 16-4(1)(5) = -4 < 0$

$\sqrt{-\Delta} = 2$

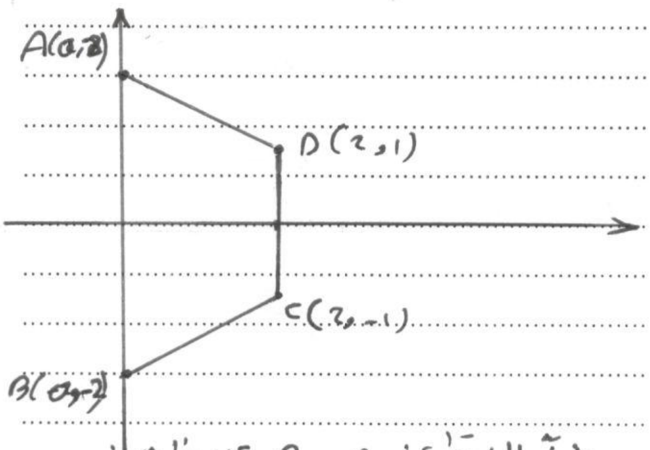
4 $z_3 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}\,i}{2a} = \frac{4+2i}{2} = \boxed{2+i}$

4 $z_4 = \overline{z_3} = \boxed{2-i}$

وهكذا يكون للمعادلة (E) أربعة حلول

ضمن هذا المستوي

4 $A(0,2)$ و $B(0,-2)$ و $C(2,-1)$ و $D(2,1)$



بما أن النقطتين A و B متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل كونهما صورتي عددين مترافقين.

وكذلك النقطتان D و C

4 فالرباعي ABCD شبه منحرف متساوي الساقين، وهو رباعي دائري.

مركز الدائرة المارة برؤوس شبه المنحرف المتساوي الساقين يقع على محور القاعدتين

وهو المحور الأفقي نرمز لها من الشكل:

4 $I(x,0)$

لتعيين x نضع $IA = ID$

ومنه $IA^2 = ID^2$

4 $(x-0)^2+(0-2)^2=(x-2)^2+(0-1)^2$

$x^2+4 = x^2-4x+4+1$

$4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

4 مركز الدائرة هو $\boxed{I(\frac{1}{4},0)}$

(نصف قطر الدائرة) $R = IA = \sqrt{(\frac{1}{4}-0)^2+(2-0)^2}$

4 $= \sqrt{\frac{1}{16}+4} = \frac{\sqrt{65}}{4}$

60

التمرين الثالث :

$$g(x) = 3x + \sqrt{9x^2+1}$$

5 $$f(x) - y_{\Delta} = \sqrt{9x^2+1} - 3x$$

نضرب بالمرافق ونقسم عليه

5 $$f(x) - y_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{9x^2+1} + 3x}$$

5 $$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - y_{\Delta} \right) = 0$$

5 ومنه فالمستقيم Δ الذي معادلته $\boxed{y = 6x}$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$.

(2) (a $$f(x) = \ln(g(x))$$

$$f(x) = \ln\left(3x + \sqrt{9x^2+1}\right)$$

f معرف عندما

$$\sqrt{9x^2+1} + 3x > 0$$

3 وهذا محقق دوماً أياً تكن $x \in \mathbb{R}$

لأنه نفرض $X = 3x$

فإن $\sqrt{X^2+1} + X > 0$

3 كون $\sqrt{X^2+1} > X$

فالتابع f معرف على $\mathbb{R}$

إثبات أن f تابع فردي:

الشرط الأول: أياً تكن $x \in \mathbb{R}$

$-x \in \mathbb{R}$ فإن B محقق الشرط (1).

الشرط الثاني: $f(-x) = -f(x)$

أياً تكن $x \in \mathbb{R}$

3 $$f(-x) = \ln\left(-3x + \sqrt{9x^2+1}\right)$$

3 $$= \ln\left(\frac{\left(\sqrt{9x^2+1} - 3x\right)\left(\sqrt{9x^2+1} + 3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+1} + 3x\right)}\right)$$

3 $$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{9x^2+1} + 3x}\right)$$

3 $$= -\ln\left(\sqrt{9x^2+1} + 3x\right) = -f(x)$$

ومنه $f(-x) = -f(x)$

فالشرط (2) محقق

وبالتالي f تابع فردي.

(b $$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

3 $$= \frac{\left(3x + \sqrt{9x^2+1}\right)'}{3x + \sqrt{9x^2+1}}$$

$$= \frac{3 + \frac{18x}{2\sqrt{9x^2+1}}}{3x + \sqrt{9x^2+1}}$$

3 $$= \frac{3 + \frac{9x}{\sqrt{9x^2+1}}}{3x + \sqrt{9x^2+1}}$$

3 $$= \frac{3\sqrt{9x^2+1} + 9x}{\sqrt{9x^2+1}\left(3x + \sqrt{9x^2+1}\right)}$$

$$= \frac{3\cancel{\left(\sqrt{9x^2+1} + 3x\right)}}{\sqrt{9x^2+1}\cancel{\left(3x + \sqrt{9x^2+1}\right)}}$$

3 $$f'(x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$$

معادلة المماس للخط C_f في النقطة التي فاصلتها $x=0$

3 هي: $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

4 $f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(0) = 3$

3 ومنه معادلة المماس هي: $\boxed{y = 3x}$

60

التمرين الرابع:

$Z = \frac{z+4}{z}$: $z \neq 0$

① يكون Z حقيقياً إذا وفقط إذا كان

5 $\bar{Z} = Z$

5 $\frac{\bar{z}+4}{\bar{z}} = \frac{z+4}{z}$

$z(\bar{z}+4) = \bar{z}(z+4)$

5 $z\bar{z} + 4z = \bar{z}z + 4\bar{z}$

$z = \bar{z}$

$z - \bar{z} = 0$

5 $2yi = 0$

ومنه $\boxed{y=0}$ مجموعة النقاط $M(z)$

5 تمثل مستقيم محور xx'

5 محذوف منه النقطة $O(0,0)$ لأن $z\neq 0$ فرضاً

② يكون Z تخيلياً بحتاً إذا وفقط إذا كان

5 $\bar{Z} = -Z$

5 $\frac{\bar{z}+4}{\bar{z}} = -\frac{z+4}{z}$

$z(\bar{z}+4) = \bar{z}(-z-4)$

5 $z\bar{z} + 4z = -z\bar{z} - 4\bar{z}$

$2z\bar{z} + 4(z+\bar{z}) = 0 \quad \div 2$

$z\bar{z} + 2(z+\bar{z}) = 0$

5 $x^2 + y^2 + 2(2x) = 0$

$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 = 0$

5 $\boxed{(x+2)^2 + y^2 = 4}$

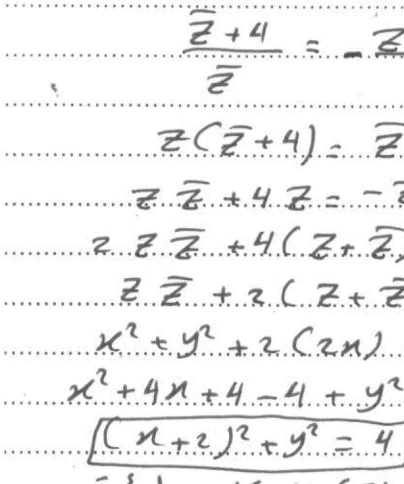
مجموعة النقاط $M(z)$ تمثل دائرة

5 مركزها $\omega(-2,0)$ ونصف قطرها يساوي 2

محذوف منها النقطة $(0,0)$ لأن

$z \neq 0$ فرضاً.

60



ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

4 ① $J(2,2,0)$

4 $I(0,2,2)$

4 $K(1,2,1)$

4 ② $G(4,4,4)$

4 $A(0,0,0)$

4 $\vec{AG}(4,4,4)$

4 $\vec{AK}(1,2,1)$

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{AK}$ و $\vec{AG}$

4 غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما

غير متناسبة $(\frac{4}{1} \neq \frac{4}{2})$

4 فالنقاط A و K و G لا تقع على استقامة

واحدة.

4 ③ $L(2,4,2)$

4 $\vec{AJ}(2,2,0)$

4 $\vec{IL}(2,2,0)$

4 نلاحظ أن $\vec{AJ} = \vec{IL}$

فالشكل $AJLI$ متوازي أضلاع

4 $AJ = \|\vec{AJ}\| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$AI = \sqrt{(0-0)^2+(2-0)^2+(2-0)^2} = 2\sqrt{2}$

4 ومنه $\boxed{AJ = AI}$

أصبح الشكل $AJLI$ متوازي أضلاع

4 فيه ضلعان متجاوران متساويان

4 فهو معين

④ $LC = \frac{1}{2} HC = 2\sqrt{2}$

4 $LJ = AJ = 2\sqrt{2} = LI$

4 $LG = \frac{1}{2} DG = 2\sqrt{2} = LD$

فالنقاط المفروضة تقع على كرة واحدة مركزها

$L(2,4,2)$ ونصف قطرها $R = 2\sqrt{2}$ معادلتها:

4 $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2 = 8$

(5)

$\overrightarrow{AK}(1,2,1)$

$\overrightarrow{AG}(4,4,4)$

$\overrightarrow{AD}(0,4,0)$

لقد أثبتنا في الطلب الثاني أن الشعاعين $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AG}$ غير مرتبطين خطياً.

لنبحث عن عددين حقيقيين α, β

بحيث يحققان

4 $$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AK} + \beta \overrightarrow{AG}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4 $$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 4\beta \\ 2\alpha + 4\beta \\ \alpha + 4\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 0 & (1) \\ 2\alpha + 4\beta = 4 & (2) \\ \alpha + 4\beta = 0 & (3) \end{cases}$$

المعادلة (1) و (3) متطابقتان.

لنأخذ المعادلتين (1),(2) بالطرح

4 $\boxed{\alpha = 4}$

نعوض في (1)

$4 + 4\beta = 0$

4 $\boxed{\beta = -1}$

ومنه $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AG}$

فالأشعة $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{AG}$ مرتبطة خطية

4

فالنقاط A و K و G و D تقع في مستوٍ واحد.

100

المسألة الثانية:

$$f(x) = -\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

(1) $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

5 ومنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

5 وبالتالي $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي منطبق على $x'x$

5 عند (0): $f(x)=\frac{-1-\ln x}{x}$

5+5 $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty \Rightarrow$ مستقيم مقارب شاقولي $\boxed{x=0}$

(2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

5 $f'(x)=+\frac{1}{x^2}-\frac{1-\ln x}{x^2}$

5 $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

5 $f'(x)=0$ عندما $\ln x=0$ ومنه $\boxed{x=1}$

5 $f(1)=-1$

5	x	0	1	$+\infty$
5	$f'(x)$	‖	− 0 +	
5	$f(x)$	‖	$+\infty \searrow -1 \nearrow 0$	

(3) لنوجد نقطة التماس لمماس d الذي يمر عبر أ الإحداثيات $O(0,0)$

نفرض نقطة التماس هي (x_0,y_0) فيكون

5 $\frac{y_0-0}{x_0-0}=f'(x_0)$

$\frac{f(x_0)}{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0^2}$

5 $\frac{\frac{-1-\ln x_0}{x_0}}{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0^2}$

$\frac{-1-\ln x_0}{x_0^2}=\frac{\ln x_0}{x_0^2}$

$-1-\ln x_0=\ln x_0$

$2\ln x_0=-1$

$\ln x_0=-\frac{1}{2}$

5 $\boxed{x_0=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}}$

5 معادلة المماس d من الشكل $y=mx$ (كونه يمر عبر أ الإحداثيات)

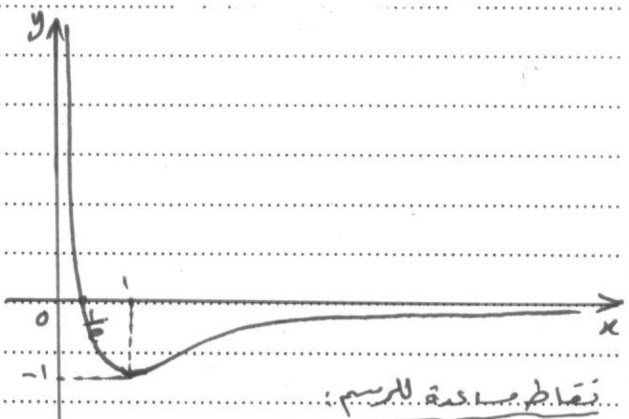
5 $m=f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{\ln e^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2}=e\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{e}{2}$

معادلة المماس d هي

5 $d:\boxed{y=-\frac{e}{2}x}$

(4) الرسم:

10



نقاط مساعدة للرسم:

التقاطع مع $x'x$: فنضع $f(x)=0$

$-1-\ln x=0$

$\ln x=-1$

$x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$\left(\frac{1}{e},0\right)$

100 انتهى السلم

ملاحظة: إذا اتبع الطالب طريقة صحيحة لم ترد في السلم يوزع المصحح علامة السؤال على هذه الطريقة.