أولاً: أجيبي عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول:

$$f(x) = x - 2 + \frac{-2+\cos x}{x}$$

5 $f(x) - (x-2) = \frac{-2+\cos x}{x}$

$-1 \le \cos x \le 1$

5 $-3 \le -2+\cos x \le -1$

بما أن x في جوار $-\infty$ فإذا قسمنا المتراجحة

5 على x سوف تتغير جهة التراجح:

5 $\frac{-3}{x} \ge \frac{-2+\cos x}{x} \ge \frac{-1}{x}$

5 وبما أن: $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = 0$

إذاً استناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد

5 $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\cos x}{x} = 0$

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(x-2)\right) = 0$

5 ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $\boxed{y=x-2}$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

لدراسة وضع C بالنسبة إلى Δ ندرس

5 إشارة الفرق

$f(x) - y_\Delta(x) = \frac{-2+\cos x}{x}$

بما أن $-2+\cos x<0$ فإشارة $f(x)-y_\Delta(x)$ تعاكس إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
5 $f(x)-y_\Delta(x)$	$+$	‖	$-$
5 الوضع النسبي	C يقع فوق Δ	‖	C يقع تحت Δ

40

السؤال الثاني:

$$z^2 = -5+12i$$

نفرض $z=x+yi$

5 $(x+yi)^2 = -5+12i$

$x^2-y^2+2xyi = -5+12i$

5 $\boxed{x^2-y^2=-5}$

$2xy=12$

5 $\boxed{xy=6}$

$|z^2| = |-5+12i|$

5 $|z|^2 = \sqrt{25+144}$

5 $\boxed{x^2+y^2=13}$

أصبح لدينا المعادلات الثلاث:

$$\begin{cases} x^2+y^2=13 & (1) \\ x^2-y^2=-5 & (2) \\ xy=6 & (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد:

$2x^2=8$

$x^2=4$

5 ومنه $\boxed{x=2}$ أو $\boxed{x=-2}$

بطرح (2) من (1) نجد:

$2y^2=18$

$y^2=9$

5 $\boxed{y=3}$ أو $\boxed{y=-3}$

5 من المعادلة (3) نجد أن $x\cdot y=6>0$ ومنه x و y لهما الإشارة ذاتها

ومنه

5 $\boxed{z_1=2+3i}$

5 $\boxed{z_2=-2-3i}$

40

السؤال الثالث:

$A(1,-1,0)$ و $B(1,-1,4)$ و $C(1,-1,-3)$

① مركز الكرة هو النقطة I منتصف القطعة المستقيمة [AB]

5 $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

5 $I(1, -1, 2)$

نفرض نصف قطر الكرة هو R فيكون

$R=\frac{AB}{2}$

5 $AB=\sqrt{(1-1)^2+(-1+1)^2+(4-0)^2}=4$

5 $R=\frac{AB}{2}=2$

ومنه معادلة الكرة التي قطرها [AB] هي

5 $\boxed{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4}$

② 5 $\vec{AB}(0, 0, 4)$

$\vec{AC}(0, 0, -3)$

نلاحظ أنه:

5 $\vec{AB}=-\frac{4}{3}\vec{AC}$

فالشعاعان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ مرتبطان خطياً

5 فالنقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة.

السؤال الرابع:

$\ln(4x-1)-\ln(x^2-1)=2\ln 2$

لنوجد مجموعة تعريف المعادلة أولاً

5 $4x-1>0$ و $x^2-1>0$

$x>\frac{1}{4}$ و $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$x\in\left]\frac{1}{4},+\infty\right[\cap\left(]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\right)$

$x\in]1,+\infty[$

5 مجموعة تعريف المعادلة $\boxed{D=]1,+\infty[}$

لنطبق خواص اللوغاريتم على المجموعة D.

5 $\ln\left(\frac{4x-1}{x^2-1}\right)=\ln 4$

5 $\frac{4x-1}{x^2-1}=4$

$4x-1=4x^2-4$

5 $4x^2-4x-3=0$

$\Delta=16-4(4)(-3)$

5 $\Delta=64$

$\sqrt{\Delta}=8$

5 $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+8}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ مقبول

5 $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-8}{8}=-\frac{1}{2}\notin]1,+\infty[$ مرفوض

$S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

40 ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$f(x)=x^3+3\sqrt{x}-5$

5 ① f معرف ومستمر على $[0,+\infty[$ واشتقاقي على $]0,+\infty[$

5 $f(0)=-5$

5 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

10 $f'(x)=3x^2+\frac{3}{2\sqrt{x}}>0$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	-5	0	$+\infty$

5 f مستمر ومتزايد تماماً على $[0,+\infty[$

و $f([0,+\infty[)=[-5,+\infty[$

5 و $0\in[-5,+\infty[$

5 فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $[0,+\infty[$

إثبات أنه $1<\alpha<2$

5 $f(1) = -1 < 0$

5 $f(2) = 8+3\sqrt{2}-5 = 3+3\sqrt{2} > 0$

5 علماً أنه $f(1)\cdot f(2) < 0$

5 فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha \in]1,2[$

60 المجموع

التمرين الثاني:

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

① 5 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

② $f(x) \in]1.99, 2.01[$

وهذا يكافئ

10 $|f(x)-2| < 0.01$

5 $\left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| < \frac{1}{100}$

$\left|\frac{2x+1-2(x-1)}{x-1}\right| < \frac{1}{100}$

5 $\left|\frac{3}{x-1}\right| < \frac{1}{100}$

$\frac{3}{|x-1|} < \frac{1}{100}$

5 $\frac{|x-1|}{3} > 100$

5 $|x-1| > 300$

5 علماً أن x في جوار $+\infty$ فإن $|x-1| = x-1$

$x-1 > 300$

$x > 301$

5 ومنه $A = 301$ أو أي عدد أكبر منه

③ بإيجاد $\lim_{x\to+\infty} (f(f(x)))$

نفرض $t = f(x)$

5 فيكون $f(f(x)) = f(t)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

5+5 $\lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{t\to2} (f(t)) = 5$

60 المجموع

التمرين الثالث:

ليكن z عدداً عقدياً ما، وليكن w عدداً عقدياً طويلته تساوي 1 وهو مختلف عن 1

المطلوب إثبات أن $\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$ تخيلي بحت.

الحل: نفرض

$Z = \frac{w\bar{z}-z}{iw-i}$

20 يكون Z تخيلياً بحتاً إذا تحقق $\bar{Z} = -Z$

5+5 $\bar{Z} = \overline{\left(\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}\right)} = \frac{\bar{w}z-\bar{z}}{-i\bar{w}+i}$

5 علماً أنه $|w|=1$ فإنه $\bar{w} = \frac{1}{w}$

5+5 $\bar{Z} = \frac{\frac{1}{w}z-\bar{z}}{-i\frac{1}{w}+i} = \frac{\frac{z-\bar{z}w}{w}}{\frac{-i+iw}{w}}$

5 $\bar{Z} = \frac{z-\bar{z}w}{iw-i} = -\left(\frac{w\bar{z}-z}{iw-i}\right)$

5 $= -Z$

5 ومنه Z تخيلي بحت.

60

التمرين الرابع:

$z_1 = -\sqrt{3}+i$ و $z_2 = 1-i$

① $z_1 = -\sqrt{3}+i$

5 $r = |z_1| = \sqrt{3+1} = 2$

5 $\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$ $\Big\}$ $\theta \in$ الربع الثاني, $\theta = \frac{5\pi}{6}$

5 $\boxed{z_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}$

$Z_2 = 1 - i$

5 $r = |Z_2| = \sqrt{2}$

5 $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\theta \in$ (الربع الرابع) ، $\theta = -\frac{\pi}{4}$

5 $\boxed{Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

$Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

10 $Z_1 \cdot Z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$

② $Z_1 \cdot Z_2 = (-\sqrt{3} + i)(1 - i)$

$= -\sqrt{3} + \sqrt{3}\, i + i + 1$

10 $Z_1 \cdot Z_2 = (1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} + 1)\, i$

③ بالمقارنة بين الشكل الجبري والمثلثي للعدد $Z_1 \cdot Z_2$ نجد

$2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = (1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} + 1)\, i$

$\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}\, i$

10 ومنه $\boxed{\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}}$

60

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

① بما أن K مركز ثقل المثلث BCD

5 فإن K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

5 ومنه G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ (مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$)

5 هو نفسه مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,3)$ و $(A,1)$ (حسب الخاصة التجميعية)

ومنه G تقع على $[AK]$ ويكون

5 $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{1+3}\overrightarrow{AK}$

5 $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AK}}$

5 ② لما كانت النقطة I منتصف $[AB]$

5 كانت النقطة I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(B,1)$

5 ولما كانت النقطة J منتصف $[CD]$

5 كانت النقطة J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$

5 ومنه G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$ هي نفسها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

5 $(I,2)$ و $(J,2)$ (حسب الخاصة التجميعية)

ومنه G تقع منتصف $[IJ]$.

5 ويكون $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{2+2}\overrightarrow{IJ}$ ، $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$

3 ③ a. $I\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

3 $J\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3 $K\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3 $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3 $\overrightarrow{BK}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

3 $\vec{u}(1, 1, 1)$

b. نلاحظ أن الشعاعين

$\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{BK}$ غير مرتبطين خطياً

3 لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{3}{4} \neq \frac{3}{2}\right)$

لنبحث عن وجود عددين حقيقيين a و b يحققان

3 $\vec{u} = a\,\overrightarrow{IJ} + b\,\overrightarrow{BK}$

3 $(1,1,1) = \left(-\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b , \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b , \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right)$

3
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b = 1 & (1) \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = 1 & (2) \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = 1 & (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و(2) نجد

$-\frac{1}{3}b = 2$

3 $\boxed{b = -6}$

نعوض في (2)

$\frac{1}{2}a - 2 = 1$

$\frac{1}{2}a = 3$

3 $\boxed{a = 6}$

نتحقق بالتعويض في (3)

$3 - 2 = 1$ محققة

ومنه

2 $\vec{u} = 6\,\vec{IJ} - 6\,\vec{BK}$

2 فالأشعة $\vec{u}$ و $\vec{IJ}$ و $\vec{BK}$ مرتبطة خطياً .

100 المجموع

المسألة الثانية :

$f(x) = x - \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)$

5 ① f معرّف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

5 $\boxed{x=0}$ مستقيم مقارب شاقولي

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$

5 ومنه $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) = \ln 2$

إذن

5 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

5 $f'(x) = 1 - \dfrac{\left(\frac{2x+1}{x}\right)'}{\frac{2x+1}{x}}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x+1}{x}}$

5 $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x(2x+1)}$

x	0		α		$+\infty$
5 $f'(x)$	‖		$+$		
5 $f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5 ② $f(x) - (x - \ln 2) = -\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) + \ln 2$

5 $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - (x - \ln 2)\right) = -\ln 2 + \ln 2 = 0$

5 ومنه المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب مائل للخط c في جوار $+\infty$

لدراسة وضع c بالنسبة إلى d ندرس إشارة الفرق

5 $f(x) - y_d = \ln\left(\dfrac{2}{\frac{2x+1}{x}}\right)$

$= \ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$

علماً أن $2x < 2x+1$ أياً كان $x \in]0,+\infty[$

5 ومنه $0 < \frac{2x}{2x+1} < 1$

5 وبالتالي $\ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) < 0$

أي $f(x) - y_d(x) < 0$

5 ومنه c يقع تحت d على المجال $]0,+\infty[$

③ f مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$

5 و $0 \in f(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى $]0,+\infty[$

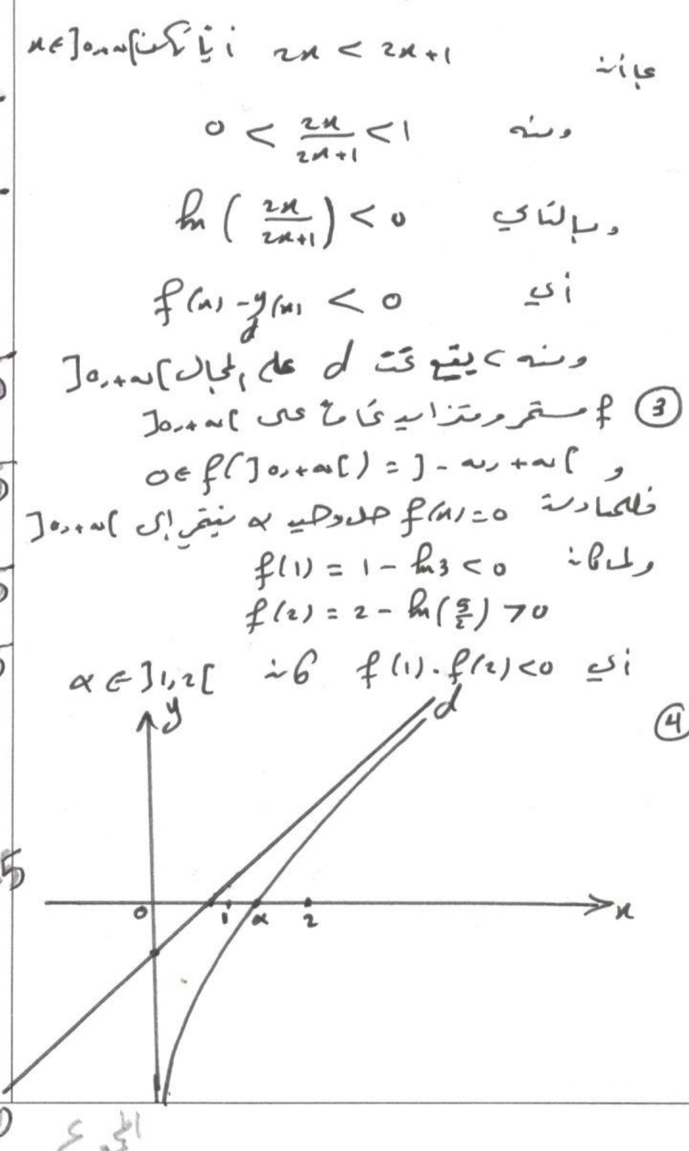
ولدينا :

5 $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$

$f(2) = 2 - \ln\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

5 أي $f(1)\cdot f(2) < 0$ ومنه $\alpha \in]1,2[$

④ 5+5



100 المجموع