سلم الرياضيات – الثالث الثانوي العلمي – النموذج (B)

أولاً : أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

f معرف على $]-\infty,-3[\cup]-3,-1]$

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ 4

ومنه $\boxed{y=1}$ مستقيم مقارب أفقي للخط c عندما يكون x في جوار $-\infty$ 4

$\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty$ 4

ومنه $\boxed{x=-3}$ مستقيم مقارب شاقولي 4

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=1$ 4

② بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ فليس للخط c مقارب مائل. 4

③ ■ في المجال $]-\infty,-3[$ يكون f مستمراً ومتناقصاً تماماً عليه 4

و $f(]-\infty,-3[)=]-\infty,1[$

و $0\in]-\infty,1[$

فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]-\infty,-3[$ 2

■ في المجال $]-3,-1]$ يكون f مستمراً عليه 4

و $f(]-3,-1])=[1,+\infty[$

و $0\notin[1,+\infty[$ 4

فليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $]-3,-1]$

محاسبه نستنتج أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد . 2

40 المجموع

السؤال الثاني:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x^2} & : x\neq 0\\ m & : x=0\end{cases}$$

5 التابع $x\mapsto\dfrac{\cos x-1}{x^2}$ مستمر على IR^*

وحتى يكون التابع f مستمراً على IR يجب أنه

5 يكون مستمراً عند 0 أي يجب أن يتحقق الشرط

$$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$$

عندما $x\neq0$ يكون

2 $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

$f(x)=-\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)$

5 $=-\left(\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}\right)$

5 $=-2\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$

5 $=-2\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\,\frac{x}{2}}\right)^2$

5 ولما أن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$ فإن

5 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=-\dfrac{1}{2}=f(0)=m$

3 ومنه $\boxed{m=-\frac{1}{2}}$ حتى يكون f مستمراً على IR

40

السؤال الثالث:

$$f(x) = \frac{-2x^2 - x + 2}{x - 1}$$

بإجراء القسمة الإقليدية نجد

$$\begin{array}{r|l} -2x^2 - x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} \pm 2x^2 \mp 2x & -2x - 3 \\ \cline{1-1} -3x + 2 & \\ \pm 3x \mp 3 & \\ \cline{1-1} -1 & \end{array}$$

5

$f(x) =$ ناتج القسمة + $\dfrac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

5 $f(x) = -2x - 3 + \dfrac{-1}{x-1}$

$f(x) - (-2x-3) = \dfrac{-1}{x-1}$

5 $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (-2x-3) \right] = 0$

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (-2x-3) \right] = 0$ و

5 ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y = -2x - 3$ مقارب مائل للخط C عندما تكون x في جوار $-\infty$ و $+\infty$.

لدراسة وضع C بالنسبة إلى Δ ندرس إشارة الفرق

5 $f(x) - y_{\Delta}(x) = -\dfrac{1}{x-1}$

	x	$-\infty$	1	$+\infty$
5	$f(x)-y_{\Delta}(x)$	$+$	‖	$-$
5	الوضع النسبي	C يقع فوق Δ	‖	C يقع تحت Δ

40

السؤال الرابع:

$$\frac{1}{2} \ln 2x = \ln(3-x) - \ln\left(\sqrt{x+1}\right)$$

■ لنوجد أولاً مجموعة تعريف المعادلة

5 $x+1>0$ و $3-x>0$ و $2x>0$

$x>-1$ و $x<3$ و $x>0$

5 $x \in]0,+\infty[\cap]-\infty,3[\cap]-1,+\infty[$

$x \in]0,3[$

5 مجموعة تعريف المعادلة $\boxed{D =]0,3[}$

■ لنطبق خواص اللوغاريتم على المجموعة D :

5 $\ln\sqrt{2x} = \ln\left(\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}}\right)$

$\sqrt{2x} = \dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}}$

5 $\sqrt{2x} \cdot \sqrt{x+1} = 3-x$

نربع الطرفين

$2x(x+1) = (3-x)^2$

$2x^2 + 2x = 9 - 6x + x^2$

5 $x^2 + 8x - 9 = 0$

$(x+9)(x-1) = 0$

5 $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9 \notin]0,3[$ مرفوض

5 أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in]0,3[$ مقبول

ومنه

$S = \{1\}$

40

ثانياً: حلي التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

لما كان $\vec{AE}=\frac{1}{3}\vec{AD}$

10 كان E مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,1)$ و $(A,2)$

ولما كان $\vec{CF}=\frac{2}{3}\vec{CB}$

10 كان F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2)$ و $(C,1)$

ومنه مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

10 هو نفسه مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(E,3)$ و $(F,3)$ (حسب الخاصة التجميعية)

5 فهو النقطة H منتصف القطعة المستقيمة $[EF]$

من جهة أخرى:

لما كانت النقطة I منتصف $[AB]$

5 كانت I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(B,2)$

ولما كانت النقطة J منتصف $[CD]$

5 كانت J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(C,1)$ و $(D,1)$

10 ومنه H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)$ و $(B,2)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

هو نفسه H مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,4)$ و $(J,2)$

5 فالنقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

60

التمرين الثاني:

ليكن العدد العقدي $Z=(-3+i\sqrt{3})^4$

(1) اكتبي العدد العقدي Z بالشكل المثلثي ثم بالشكل الجبري.

نفرض $Z_1=-3+i\sqrt{3}$

5 $r=|Z_1|=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

5 $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

5 $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$

θ تنتمي إلى الربع الثاني ومنه

5 $\theta=\frac{5\pi}{6}$

5 $Z_1=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

5 $Z=Z_1^4=(2\sqrt{3})^4\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$

5 $Z=144\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}-2\pi\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{3}-2\pi\right)\right)$

5 $\boxed{Z=144\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$

$Z=144\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

5 $\boxed{Z=-72-72\sqrt{3}\,i}$

(2) 5+5 $(-3-i\sqrt{3})^4=\overline{Z}=-72+72\sqrt{3}\,i$

5 ومنه $\boxed{(-3+i\sqrt{3})^4+(-3-i\sqrt{3})^4=-144}$

60

التمرين الثالث :

$A(2,-1,3)$ و $B(-4,3,1)$

5 ① مركز الكرة هو منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$

6 $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$

$I\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3-1}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$

6 $I(-1, 1, 2)$

3 نصف قطر الكرة $R = \frac{AB}{2}$

5 $AB = \sqrt{(2+4)^2+(-1-3)^2+(3-1)^2}$

$= \sqrt{36+16+4}$

$= \sqrt{56}$

$AB = 2\sqrt{14}$

5 $R = \frac{2\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$

معادلة الكرة التي قطرها $[AB]$ هي :

10 $\boxed{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2 = 14}$

② النقطة C تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ إذا وفقط إذا تحقق الشرط

10 $CA = CB$

أي $CA^2 = CB^2$

5 $(1-2)^2+(2+1)^2+(\lambda-3)^2 = (1+4)^2+(2-3)^2+(\lambda-1)^2$

$1+9+\lambda^2-6\lambda+9 = 25+1+\lambda^2-2\lambda+1$

$19-6\lambda = 27-2\lambda$

$-8 = 4\lambda$

5 $\boxed{\lambda = -2}$

60

التمرين الرابع :

① $g(x) = \frac{x}{E(x)}$

الحل : نحن نعلم أنّ

$E(x) = n$ حيث $n \le x < n+1$

حيث $n \in \mathbb{Z}$

ومنه $E(x) \le x < E(x)+1$

نطرح 1 فنجد

$E(x)-1 \le x-1 < E(x)$

ومنه نستنتج أنّ

10 $x-1 < E(x) \le x$

5 $\frac{1}{x-1} > \frac{1}{E(x)} \geq \frac{1}{x}$

بما أنّ x في جوار $+\infty$ فبإذا ضربنا المتراجحة بـ x لا تتغير جهة التراجح

5 $\frac{x}{x-1} > \frac{x}{E(x)} \geq 1$

وبما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$

5 فاستناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{E(x)} = 1$

② $f(x) = \sqrt{x} - E(x)$

15 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & : 0 \le x < 1 \\ \sqrt{x}-1 & : 1 \le x < 2 \\ \sqrt{2}-2 & : x = 2 \end{cases}$

نلاحظ أنّ

5X2 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}) = 1 \neq f(1) = 0$

5 ومنه f غير مستمر عند 1

5 وبالتالي f غير مستمر على المجال $[0,2]$

60

ثالثاً: حلي المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

$(E)\quad z^3+8iz^2-24z-32i=0$

① $(z+4i)(z^2+4iz-8)=$

5 $z^3+4iz^2-8z+4iz^2-16z-32i$

$=z^3+8iz^2-24z-32i$

المعادلة (E) تكافئ المعادلة

5 $(z+4i)(z^2+4iz-8)=0$

5 $z+4i=0 \Rightarrow \boxed{z=-4i}$

$z^2+4iz-8=0$

$\Delta=(4i)^2-4(1)(-8)$

5 $=-16+32=16=(4)^2$

5 $z=\dfrac{-4i+4}{2}=\boxed{2-2i}$

5 $z=\dfrac{-4i-4}{2}=\boxed{-2-2i}$

② $c=-4i$ و $b=-2-2i$ و $a=2-2i$

5 $\dfrac{b-c}{a-c}=\dfrac{-2-2i+4i}{2-2i+4i}$

$=\dfrac{-2+2i}{2+2i}$

$=\dfrac{(-2+2i)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}$

5 $=\dfrac{-4+4i+4i+4}{4+4}$

$=\dfrac{8i}{8}=i$

$\dfrac{b-c}{a-c}=i$

5 $\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)=\arg(i)$

5 $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\dfrac{\pi}{2}$

5 فالمثلث ABC قائم في C

$\left|\dfrac{b-c}{a-c}\right|=|i|$

5 $\dfrac{|b-c|}{|a-c|}=1$

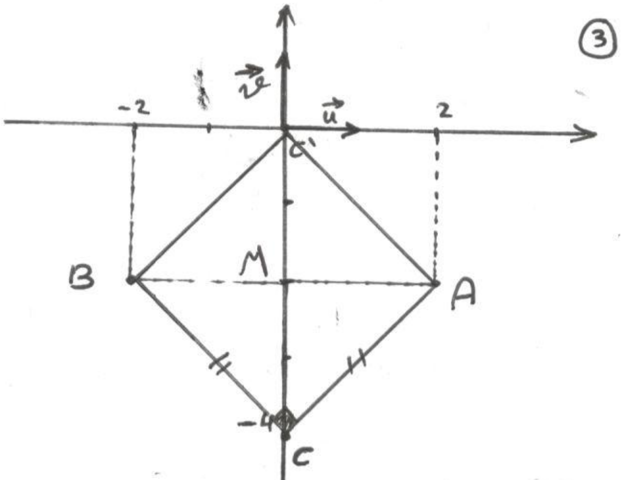
$|b-c|=|a-c|$

5 $CB=CA$

فالمثلث ABC متساوي الساقين

5 فأصبح المثلث ABC قائم في C ومتساوي الساقين

③

5 

5 إذا كان الرباعي $AC'BC$ مربعاً فإن أقطاره تتناصف ومنه

5 $\dfrac{z_C+z_{C'}}{2}=z_M=\dfrac{z_A+z_B}{2}$

$z_C+z_{C'}=z_A+z_B$

5 $z_{C'}=z_A+z_B-z_C$

$=2-2i+(-2+2i)-(-4i)$

$\boxed{z_{C'}=0}$

$AC'BC$ مساحة المربع $=AC^2$

5 $AC=|c-a|=|-4i-2+2i|$

$=|-2-2i|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$

5 مساحة المربع $=(2\sqrt{2})^2=8$

100 المجموع

المسألة الثانية:

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

① أياً كان $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

5 فإن $-x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

فالشرط الأول محقق

5 $f(-x) = \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)$

5 $= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

5 $= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1}$

5 $= -\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -f(x)$

فالشرط الثاني محقق

5 ومنه f تابع فردي، وخطه البياني متناظر بالنسبة إلى مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$

② $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$

5 ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 1 = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$

5 ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 1 = 0$

5 ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب منطبق على $x'x$ للخط C عندما تكون x في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

$x \to -1$

5 ومنه $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$

5 ومنه $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

5 ومنه $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$

5 ومنه $\boxed{x=1}$ مستقيم مقارب شاقولي للخط C.

5 ③ f اشتقاقي على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

5 $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

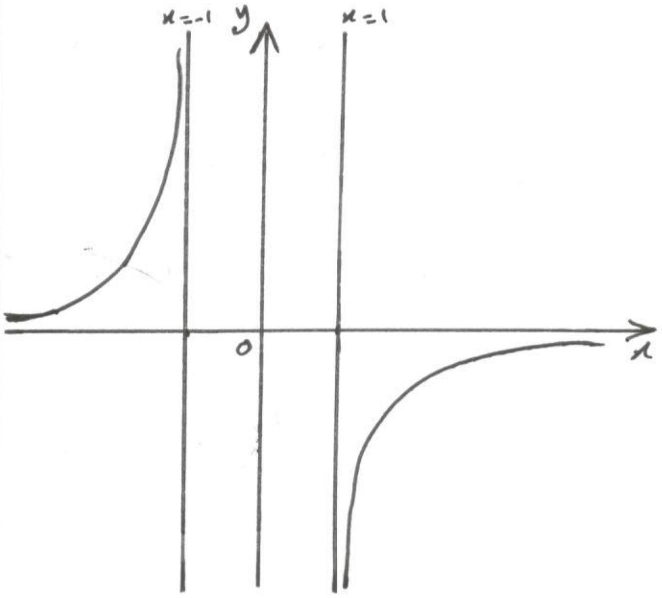
$f'(x) = \dfrac{\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}}{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

5 $f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)\cdot(x+1)} > 0$

ومنه f متزايد تماماً على كل من مجالي D_f.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
5 $f'(x)$	$+$			$+$
5 $f(x)$	$0 \nearrow +\infty$			$-\infty \nearrow 1$

5+5



100 انتهى السلم