سلم الرياضيات – الثالث الثانوي العلمي – النموذج (A)

أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

f التابع المعرف على $]-1,1[\cup]1,+\infty[$

① $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$ **4**

ومنه (d_1) : $\boxed{x=-1}$ مستقيم مقارب شاقولي **4**

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ **4**

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ **4**

ومنه (d_2) : $\boxed{x=1}$ مستقيم مقارب شاقولي. **4**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ **4**

ومنه $\boxed{y=2}$ مستقيم مقارب أفقي **4**

② للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد. **4**

(لأن الخط C يقطع محور xx' في نقطة وحيدة)

③ نلاحظ من الخط البياني للتابع f أن مجموعة حلول المتراجحة $f(x)\geq 2$ هي

$x\in]-1,0]\cup]1,+\infty[$ **4+4**

40

السؤال الثاني:

$$f(x)=\frac{x^3+\cos x-1}{x^2}$$

① نلاحظ أن $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ لإزالتها نكتب

3 $f(x)=x+\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

3 $f(x)=x-\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

3 $=x-\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

3 $=x-2\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2$

3 $=x-2\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2$

3 ولما كان $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1$

3 كان $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0-2\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=-\frac{1}{2}$

② إثبات أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

3 $f(x)-y_{\Delta}(x)=\dfrac{\cos x-1}{x^2}$

3 $-1\leq\cos x\leq1$

3 $-2\leq\cos x-1\leq0$

وبما أن $x^2>0$ فإذا قسمنا المتراجحة على x^2 لا تتغير جهة التراجح

3 $\dfrac{-2}{x^2}\leq\dfrac{\cos x-1}{x^2}\leq0$

2 وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-2}{x^2}\right)=0$

فإن استناداً إلى مبرهنة الإحاطة (1) نجد

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=0$

3 أي $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-y_{\Delta}(x)\right)=0$

2 ومنه المستقيم $\Delta: y=x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$.

40

السؤال الثالث:

$$Z=\left(\frac{-2+2i\sqrt{3}}{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^8$$

نفرض $Z_1=-2+2i\sqrt{3}$

2 $r=|Z_1|=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$

2 $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

2 $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2 θ تقع في الربع الثاني ومنه $\theta=\frac{2\pi}{3}$

2 $\boxed{Z_1=4e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

نعوض $Z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

2 $r = |Z_2| = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2$

2 $\cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 $\sin\theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

θ تقع في الربع الثالث $\theta = \frac{5\pi}{4}$

2

2 $\boxed{Z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}}}$

3 $\frac{Z_1}{Z_2} = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{4}\right)}$

3 $= 2e^{i\left(-\frac{7\pi}{12}\right)}$

3 $Z = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^8 = 2^8 e^{i\left(\frac{-14\pi}{3}\right)}$

$= 256\, e^{i\left(-\frac{14\pi}{3} + 6\pi\right)}$

3 $\boxed{Z = 256\, e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}}$

4 $Z = 256\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

2 $Z = 256\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

2 $\boxed{Z = -128 - 128\sqrt{3}\, i}$

40 **السؤال الرابع:**

$B(7,2,4)$ و $A(2,-3,3)$

$\vec{v}(3,1,-1)$ و $\vec{u}(1,2,1)$

4 نلاحظ أن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{1}{3} \neq \frac{2}{1}\right)$

3

3 فالمستقيمان d و d' غير متوازيين.

حتى يكون المستقيمان d و d' متقاطعين علينا إثبات وقوع المستقيمين d و d' في مستوٍ واحد.

فلإثبات أن d و d' يقعان في مستوٍ واحد، يكفي إثبات أن الأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطياً

وهذا يؤول إلى إثبات وجود عددين حقيقيين a و b يحققان

3 $\vec{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$

3 $(5, 5, 1) = (a+3b, 2a+b, a-b)$

عندئذٍ سنحصل على جملة من ثلاث معادلات خطية بالمجهولين a و b وهي:

3 $\begin{cases} a+3b=5 & (1) \\ 2a+b=5 & (2) \\ a-b=1 & (3) \end{cases}$

لحل مثل هذه الجملة نختار جملة من معادلتين مثل [(1)،(3)] ثم نحلها ثم نتحقق فيما إذا كان العددان a و b اللذان وجدناهما حلول للمعادلة الثالثة.

لنحل إذن الجملة [(1)،(3)]

3 $\begin{cases} a+3b=5 & (1) \\ a-b=1 & (3) \end{cases}$

3 بالطرح نجد $4b=4$

ومنه $\boxed{b=1}$

3 نعوض في (3) فنجد $a-1=1$

ومنه $\boxed{a=2}$

لنعوض الحلول في المعادلة الثانية

3 $2(2)+1=5$ محقق

ومنه

3 $\vec{AB} = 2\vec{u} + \vec{v}$

3 فالأشعة $\vec{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطياً.

3 فالمستقيمان d و d' متقاطعان في نقطة.

40

ثانياً : حلي التمارين الأربعة الآتية (60 درجة لكل سؤال)

التمرين الأول :

$f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$

① $\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x+5)=\lim_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ 4

ومنه $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ 4

② a. $x^2-2x+5=x^2-2x+1+4$ 4

$=(x-1)^2+4$ 4

ومنه $f(x)=\sqrt{(x-1)^2+4}$ 4

b. بما أن $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=-x+1$ في جوار $-\infty$

نخمن بأن المستقيم $-x+1$ = د مقارب مائل للخط c في جوار $-\infty$. 4

لنثبت صحة هذا التخمين :

$f(x)-(-x+1)=$

$\sqrt{(x-1)^2+4}+x-1$ 4

نضرب بالمرافق ونقسم عليه

$f(x)-(-x+1)=\frac{(x-1)^2+4-(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+4}-(x-1)}$ 4

$f(x)-(-x+1)=\frac{4}{\sqrt{(x-1)^2+4}-(x-1)}$ 4

$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+1)\right)=0$ 4

ومنه المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x+1$ مقارب مائل للخط c في جواره $-\infty$. 4

لدراسة وضع c بالنسبة إلى Δ ندرس إشارة الفرق

$f(x)-y_\Delta(x)=\sqrt{(x-1)^2+4}+(x-1)$

نفرض $X=x-1$ 4

$f(x)-y_\Delta(x)=\sqrt{X^2+4}+X$

وبما أن $\sqrt{X^2+4}>-X$ أياً تكن $X\in R$ 4

فإن $f(x)-y_\Delta(x)>0$ 4

ومنه c يقع فوق Δ أياً تكن $x\in\mathbb{R}$ 4

60

التمرين الثاني :

أولاً : $f(x)=1+\frac{1}{x^3}$

① $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ 3

$f(x)\in]0.99\,,\,1.01[$ 3

يكافئ $|f(x)-1|<0.01$ 3

$\left|\frac{1}{x^3}\right|<\frac{1}{100}$ 3

$\frac{1}{|x^3|}<\frac{1}{100}$ 3

$|x^3|>100$ 3

بما أن x في جوار $+\infty$ فإن $|x^3|=x^3$ 3

$x^3>100$ 3

$x>\sqrt[3]{100}$ 3

ومنه $A=\sqrt[3]{100}$ أو أي عدد أكبر منه. 3

② لإيجاد $\lim_{x\to+\infty}f(f(x))$

نفرض $t=f(x)$ 3

فيكون $f(f(x))=f(t)$ 3

لما كان $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ 3

كان $\lim_{x\to+\infty}f(f(x))=\lim_{t\to1}f(t)=2$ 3

ثانياً: $\ln(x^2) - \ln\left(\frac{1}{x}\right) - 2 \le 0$

2 المتراجحة معرفة عندما $x > 0$

2 $2\ln x - (-\ln x) - 2 \le 0$

2 $2\ln x + \ln x - 2 \le 0$

2 $3\ln x \le 2$

2 $\ln x \le \frac{2}{3}$

2 $\ln x \le \ln e^{\frac{2}{3}}$

2 $x \le \sqrt[3]{e^2}$

مجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي

2 $0 < x \le \sqrt[3]{e^2}$

2 $x \in]0, \sqrt[3]{e^2}]$

>60

التمرين الثالث:

$(E): z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$

① $(3)^3 - 13(3)^2 + 59(3) - 87 =$

3 $27 - 117 + 177 - 87$

$= 204 - 204 = 0$

ومنه $z=3$ جذر للمعادلة (E)

3 وبالتالي $(z-3)$ عامل مشترك.

$$\begin{array}{r|l} & z^2 - 10z + 29 \\ \hline z^3 - 13z^2 + 59z - 87 & z-3 \\ z^3 - 3z^2 & \\ \hline -10z^2 + 59z - 87 & \\ -10z^2 + 30z & \\ \hline 29z - 87 & \\ 29z - 87 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

3 ومنه $z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = (z-3)(z^2 - 10z + 29)$

فالمعادلة تكافئ:

3 $(z-3).(z^2 - 10z + 29) = 0$

$z - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{z = 3}$

$z^2 - 10z + 29 = 0$

3 $\Delta = 100 - 4(1)(29) = -16 < 0$

للمعادلة حلان في $\mathbb{C}$

$\sqrt{-\Delta} = 4$

3 $z_1 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}\, i}{2a} = \frac{10 + 4i}{2} = \boxed{5+2i}$

3 $z_2 = \overline{z_1} = \boxed{5 - 2i}$

② 3 $\frac{b-a}{c-a} = \frac{5-2i-3}{5+2i-3} = \frac{2-2i}{2+2i}$

3 $= \frac{(2-2i).(2-2i)}{(2+2i)\,(2-2i)}$

3 $= \frac{-8i}{4+4} = -i$

$\frac{b-a}{c-a} = -i$

3+3 $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right) = \arg(-i)$ — $\left|\frac{b-a}{c-a}\right| = |-i|$

3+3 $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{2}$ — $\frac{|b-a|}{|c-a|} = 1$

3+3 فالمثلث ABC قائم في A — $|b-a| = |c-a|$

3 $AB = AC$

3 فالمثلث ABC متساوي الساقين.

3 فالمثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

>60

التمرين الرابع:

① $c = a e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2 $c = 8 e^{-i\frac{\pi}{3}}$

2 $c = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2 $c = 8\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

2 $\boxed{c = 4 - 4\sqrt{3} i}$

$d = b e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2 $d = 8i e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2 $d = 8 e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2 $d = 8 e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)}$

2 $d = 8 e^{i\frac{7\pi}{6}}$

2 $d = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

2 $= 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$

2 $\boxed{d = -4\sqrt{3} - 4i}$

② 2 لما كان $|a| = |b| = |c| = |d| = 8$

2 أي $OA = OB = OC = OD = 8$

فالنقاط A و B و C و D تقع على دائرة

2 واحدة مركزها O ونصف قطرها 8

③ a. 2 $Z_1 = Z_{\vec{AC}} = c - a = 4 - 4\sqrt{3} i - 8$

2 $\boxed{Z_1 = -4 - 4\sqrt{3} i}$

2 $\boxed{\sqrt{3} Z_1 = -4\sqrt{3} - 12i}$

2 $Z_2 = Z_{\vec{BD}} = d - b = -4\sqrt{3} - 4i - 8i$

2 $\boxed{Z_2 = -4\sqrt{3} - 12i}$

ومنه نستنتج:

2 $\boxed{Z_2 = \sqrt{3} Z_1}$

b. 2 $|Z_3| = |Z_{\vec{AB}}| = |b - a| = |-8 + 8i|$

$= \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}$

2 $|Z_4| = |Z_{\vec{DC}}| = |c - d| =$

2 $= |(4 + 4\sqrt{3}) + (4 - 4\sqrt{3}) i|$

2 $= \sqrt{(4 + 4\sqrt{3})^2 + (4 - 4\sqrt{3})^2}$

2 $= \sqrt{16 + 32\sqrt{3} + 48 + 16 - 32\sqrt{3} i + 48}$

2 $= \sqrt{64 + 64} = 8\sqrt{2}$

ومنه نستنتج:

2 $|Z_3| = |Z_4|$

c. بما أن $Z_2 = \sqrt{3} Z_1$

2 فإن $\vec{BD} = \sqrt{3} \vec{AC}$

1 فالشعاعان $\vec{AC}$ و $\vec{BD}$ مرتبطان خطياً

1 فالمستقيمان (AC) و (BD) متوازيان .....(I)

وبما أن $|Z_3| = |Z_4|$

1 فإن $\|\vec{AB}\| = \|\vec{DC}\|$ ..... (II)

من (I) و (II) نستنتج أن الرباعي

1 ABDC شبه منحرف متساوي الساقين

/60

ثالثاً: حل المسألة الآتية: (١٠٠ درجة لكل سؤال)

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{\ln x}$$

① f معرّف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

3 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

3 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

3 $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$

3 $\boxed{x=1}$ مستقيم مقارب شاقولي للخط C.

3 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

② 3 $f(x) - \frac{x}{2} = -\frac{2}{\ln x}$

3 $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{\ln x}\right) = 0$

3 ومنه المستقيم $\Delta: y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

لدراسة وضع C بالنسبة إلى Δ ندرس إشارة الفرق:

3 $f(x) - y_\Delta(x) = \frac{-2}{\ln x}$

	x	0		1		$+\infty$
3	$f(x)-y_\Delta$	‖	+	‖	−	
3	الوضع النسبي	‖	C يقع فوق Δ	‖	C يقع تحت Δ	

③ 3 f اشتقاقي على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

3 $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{0 - \frac{1}{x}(2)}{(\ln x)^2}$

3 $f'(x) = 1 + \frac{2}{x(\ln x)^2} > 0$

6 ومنه f متزايد تماماً على كل من مجاليه
أو من جدول التغيرات

	x	0		1		α		$+\infty$
3	$f'(x)$	‖	+	‖		+		
3	$f(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

④ 3 في المجال $]0,1[$ يكون f مستمراً عليه

3 $f(]0,1[) =]0,+\infty[$

3 و $0 \notin]0,+\infty[$

3 فليس للمعادلة $f(x)=0$ حل في المجال $]0,1[$

3 في المجال $]1,+\infty[$ يكون f مستمراً ومتزايداً تماماً عليه

3 و $f(]1,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

3 و $0 \in]-\infty,+\infty[$

3 فللمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,+\infty[$

إثبات أن $3 < \alpha < 4$

3 $f(3) = \frac{3}{2} - \frac{2}{\ln 3}$

3 $= \frac{3\ln 3 - 4}{2\ln 3} < 0$

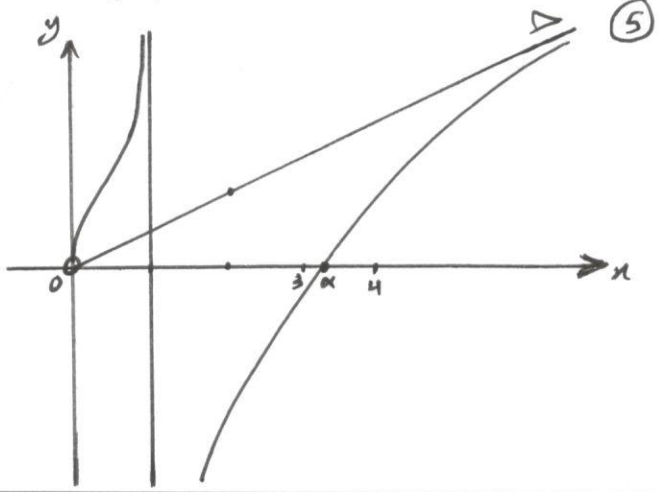
3 $f(4) = 2 - \frac{2}{2\ln 2}$

$= 2 - \frac{1}{\ln 2} = \frac{2\ln 2 - 1}{\ln 2}$

3 $f(4) > 0$

3 بما أن $f(3).f(4)<0$ فإن $3 < \alpha < 4$

⑤



10

100

المسألة الثانية:

①

3+3 — $A(0,0,0)$ ، $B(1,0,0)$

3+3 — $C(1,1,0)$ ، $D(0,1,0)$

3+3 — $E(0,0,1)$ ، $F(1,0,1)$

3+3 — $G(1,1,1)$ ، $H(0,1,1)$

3+3 — $I(\frac{1}{2},0,0)$ ، $J(0,1,\frac{1}{2})$

3 — $K(\frac{1}{2},1,1)$

②

3 — $\overrightarrow{BD}(-1,1,0)$

3 — $\overrightarrow{IJ}(-\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

3 — $\overrightarrow{IK}(0,1,1)$

3 — نلاحظ أن الشعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{1}{1} \neq \frac{\frac{1}{2}}{1}\right)$

لإثبات أن الأشعة $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطة خطياً نبحث عن وجود عددين حقيقيين α و β تحققان:

3 — $\overrightarrow{BD} = \alpha \overrightarrow{IJ} + \beta \overrightarrow{IK}$

3 — $(-1,1,0) = \left(-\frac{1}{2}\alpha , \alpha+\beta , \frac{1}{2}\alpha+\beta\right)$

3 — ومنه

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\alpha = -1 & (1) \\ \alpha+\beta = 1 & (2) \\ \frac{1}{2}\alpha+\beta = 0 & (3) \end{cases}$$

لنأخذ المعادلتين (1) و(2)

3 — من (1) نجد أن $\boxed{\alpha = 2}$

3 — نعوض في (2) $2+\beta = 1$ ، $\boxed{\beta = -1}$

نتحقق بالتعويض في (3)

3 — $\frac{1}{2}(2) - 1 = 1-1 = 0$

ومنه $\boxed{\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ} - \overrightarrow{IK}}$

3 — فالأشعة $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطة خطياً.

ومنه المستقيم (BD) يوازي المستوي (IJK)

③

3 — $IE = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3 — $IC = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3 — نلاحظ أن $IE = IC$

ومنه I تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[EC]$

2 — $JC = \sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2 — $JE = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2 — نلاحظ أن $JC = JE$

ومنه J تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[EC]$

$KE = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2 — $KC = \sqrt{(\frac{1}{2})^2+(1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

نلاحظ أن $KE = KC$

2 — ومنه K تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[EC]$

محصلة نستنتج أن المستوي (IJK) يمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[EC]$

3 — $IJ = \|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

3 — $IK = \|\overrightarrow{IK}\| = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}$

3 — $JK = \sqrt{(\frac{1}{2}-0)^2+0+(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نلاحظ أن

3 — $IK^2 = IJ^2 + JK^2$

$2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ محققة

ومنه حسب عكس فيثاغورس نجد أن

3 — المثلث IJK قائم في J

100 — انتهى السلم.