أولاً:

السؤال الأول:

5 $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$

5 $= \frac{-1}{8i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^3$

3 $= \frac{-1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{2ix}\cdot e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}\right)$

3 $= -\frac{1}{8i}\left((e^{3ix} - e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})\right)$

3 $= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin 3x - 6i\sin x\right)$

3 $= -\frac{1}{4}\left(\sin 3x - 3\sin x\right)$

3 $= -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x\right)dx$

5 $= \left[+\frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

5 $= [\ 0\ ] - \left[\frac{1}{12} - \frac{3}{4}\right]$

5 $= \frac{2}{3}$

40

السؤال الثاني:

$12\binom{n+2}{4} = 7P_n^3$

شرط الحل $n \in N,\ n+2 \geq 4$ و $n \geq 3$

5 ومنه $n \in \{3, 4, 5, \dots\}$

5 $12\,\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{4\times3\times2\times1} = 7n(n-1)(n-2)$

5 $(n+2)(n+1) = 14(n-2)$

5 $n^2 + 3n + 2 = 14n - 28$

5 $n^2 - 11n + 30 = 0$

5 $(n-6)(n-5) = 0$

5 $\boxed{n = 6}$ مقبول

5 أو $\boxed{n = 5}$ مقبول

40

السؤال الثالث:

$2y' + 5y = 0$

5 $y' = -\frac{5}{2}y$

وهي معادلة تفاضلية من الشكل

$y' = ay$

5 وحلها هو $y = Ke^{ax}$

5 $y = Ke^{-\frac{5}{2}x}$

$f(x) = Ke^{-\frac{5}{2}x}$

5 $f'(x) = -\frac{5}{2}Ke^{-\frac{5}{2}x}$

5 $f'(0) = -2$

5 $-\frac{5}{2}K = -2$

5 $\boxed{K = \frac{4}{5}}$

5 $y = \frac{4}{5}e^{-\frac{5}{2}x}$

40

السؤال الرابع:

3 $\vec{AB}(-1, -2, 2)$

3 $\vec{n}(2, 0, 1)$

نلاحظ أن: $\vec{AB}$ غير مرتبط خطياً مع $\vec{n}$

3 لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{0}{-2} \neq \frac{1}{2}\right)$

3 فالمستقيم (AB) ليس عمودياً على P.

نفرض $\vec{n_Q}(a,b,c)$ فيكون

3 $\vec{n_Q}\cdot\vec{AB}=0$ ومنه $\vec{n_Q}\perp\vec{AB}$

3 $\boxed{-a-2b+2c=0}$ ---(1)

3 و $\vec{n_Q}\perp\vec{n}$ ومنه $\vec{n_Q}\cdot\vec{n}=0$

3 $\boxed{2a+c=0}$ ---(2)

نفرض $c=2$ فنجد $2a+2=0$

3 $\boxed{a=-1}$

نعوض

$+1-2b+4=0$

$\boxed{b=\frac{5}{2}}$

3 $\boxed{\vec{n_Q}\left(-1,\frac{5}{2},2\right)}$

فمعادلة المستوي Q هي

3 $-1(x-1)+\frac{5}{2}(y-1)+2(z-1)=0$

4 $\boxed{-x+\frac{5}{2}y+2z-\frac{7}{2}=0}$

40

ثانياً:

التمرين الأول: الخاصة المطلوب إثباتها

$E(n): \ll 1\times2+2\times3+\dots+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\gg$

والمطلوب إثباتها أياً كان العدد الطبيعي $n\geq1$

5 (I) الخاصة $E(1)$ صحيحة لأن

5 $1\times2=\frac{1(2)(3)}{3}$

5 $2=2$ محققة

5 (II) لنفترض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة

5 ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

5 $E(n+1): \ll 1\times2+2\times3+\dots+(n+1)\times(n+2)=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}\gg$

10 $1\times2+2\times3+\dots+n\times(n+1)+(n+1)(n+2)$

5 $=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}+(n+1)(n+2)$

5 $=\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3}$

5 $=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$

5 فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة أيضاً إذا كانت $E(n)$

فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n .

60

التمرين الثاني:

5×3 ① $\binom{12}{3}=\frac{P^3_{12}}{3!}=\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

5×3 ② $P(A)=\frac{\binom{8}{3}}{220}=\frac{56}{220}$

5×3 ③ $P(B)=\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{2}}{220}=\frac{48}{220}$

5×3 ④ $P(C)=\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{10}{2}+\binom{1}{1}\binom{10}{2}}{220}=\frac{90}{220}=\frac{9}{22}$

60

التمرين الثالث:

① الحدث A: كلا البطاقتين زوجيتين.

الحدث B: مجموع رقميهما زوجياً.

5 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

B = {(ز، ز), (ف، ف)}

5 $P(B)=\frac{3\times2+3\times2}{6\times5}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$

A∩B = {(ز، ز)}

5 $P(A\cap B)=\frac{3\times2}{6\times5}=\frac{1}{5}$

5 $P(A|B)=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{2}$

10 ② $X(\Omega)=\{1,2,3,4,5\}$

	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2	1		2	2	2	2
3	1	2		3	3	3
4	1	2	3		4	4
5	1	2	3	4		5
6	1	2	3	4	5	

3 $P(X=1)=\dfrac{10}{30}$

3 $P(X=2)=\dfrac{8}{30}$

3 $P(X=3)=\dfrac{6}{30}$

3 $P(X=4)=\dfrac{4}{30}$

3 $P(X=5)=\dfrac{2}{30}$

3

x	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

3 $E(X)=\sum_{i=1}^{5} x_i p_i$

$=\dfrac{10+16+18+16+10}{30}$

3 $=\dfrac{70}{30}=\dfrac{7}{3}$

3 $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

$=\left(\dfrac{10}{30}+\dfrac{32}{30}+\dfrac{54}{30}+\dfrac{64}{30}+\dfrac{50}{30}\right)-\dfrac{49}{9}$

3 $=\dfrac{210}{30}-\dfrac{49}{9}$

60 $=\dfrac{63-49}{9}=\dfrac{14}{9}$

ثالثاً:

المسألة الأولى:

6 ① $I(1,0,0)$

6 $F(2,0,1)$

6 $H(0,1,1)$

$\vec{IF}(1,0,1)$

$\vec{IH}(-1,1,1)$

3 نلاحظ أن الشعاعين $\vec{IF}$ و $\vec{IH}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة.

$\left(\frac{1}{-1}\neq\frac{0}{1}\right)$

3 نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظمياً للمستوي (IFH) فيكون

3+3 $\vec{IF}\perp\vec{n}$ ومنه $\boxed{a+c=0}$ —(1)

و $\vec{IH}\perp\vec{n}$ أي $\vec{n}\cdot\vec{IH}=0$

3+3 ومنه $\boxed{-a+b+c=0}$ (2)

3+3 نفرض $\boxed{c=1}$ نجد $\boxed{a=-1}$ نعوض

3 $1+b+1=0$

$\boxed{b=-2}$

3 $\vec{n}(-1,-2,1)$

معادلة المستوي:

3 $-1(x-1)-2y+z=0$

6 $\boxed{-x-2y+z+1=0}$

3+3 ② $\vec{n}(-1,-2,1)$ و $G(2,1,1)$

5 $\begin{cases} x=-t+2 \\ y=-2t+1 \quad : t\in\mathbb{R} \\ z=t+1 \end{cases}$

ملاحظة: التمرين الثالث موجود في الصفحة (5).

(3) $G'(-t+2, -2t+1, t+1)$ 5

وهي تحقق معادلة المستوي (IFH) ومنه

$-(-t+2)-2(-2t+1)+t+1+1=0$ 5

$t-2+4t-2+t+2=0$

$6t=2$

$\boxed{t=\frac{1}{3}}$ 5

$G'(-\frac{1}{3}+2, -\frac{2}{3}+1, \frac{1}{3}+1)$

$G'(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ 5

100

المسألة الثانية:

$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

(2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$ 5

ومنه $\boxed{y=-1}$ مقارب أفقي للخط (C) في جوار $(-\infty)$ 5

$f(x)=\frac{e^x(1-\frac{1}{e^x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}$ 5

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$ 5

ومنه $\boxed{y=1}$ مقارب أفقي للخط (C) في جوار $(+\infty)$ 5

(1) إثبات أن f فردي:

أياً كان $x\in\mathbb{R}$ فإن $-x\in\mathbb{R}$ محقق 5

وصحة:

$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{1+e^x}=-f(x)$ 5+5

فالشرط محقق ومنه f تابع فردي 5

(3) f مستمر واشتقاقي على كل $]-\infty,+\infty[$ 5

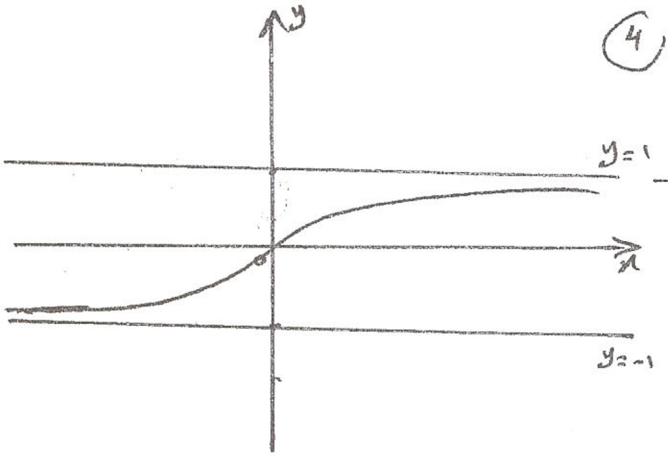
$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$ 10

$f'(x)=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$ 5

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

5 5 5

(4) 10



(5) * عندما $m\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ ليس للمعادلة $f(x)=m$ أية حلول. 5

* وعندما $m\in]-1,1[$ للمعادلة $f(x)=m$ حل وحيد. 5

100

انتهت الأجوبة.

التمرين الثالث:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$$

(1) $v_n = u_n - 4$

5 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4}$

5 $= \frac{\frac{1}{2}u_n + 2 - 4}{u_n - 4}$

5 $= \frac{\frac{1}{2}u_n - 2}{u_n - 4}$

5 $= \frac{\frac{1}{2}(u_n - 4)}{u_n - 4} = \frac{1}{2}$

3 فالمتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

3 $v_n = v_0 q^n$

3 $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$

3 $v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

3 $u_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$

(2) $S_n = \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$

3 مجموع $(n+1)$ حداً من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول -3

3 $S_n = -3\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$

3 $S_n = -6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

3 $= (v_0 - 4) + (v_1 - 4) + \dots + (v_n - 4)$

3 $= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) - 4(n+1)$

3 $S'_n = -6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 4n - 4$

3 (3) لدينا $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ لأن $-1 < \frac{1}{2} < 1$

3 $\lim_{n \to +\infty} S_n = -6$

3 $\lim_{n \to +\infty} S'_n = -\infty$

60