**أولاً: ١) احسب** $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$

نفرض $\frac{x+2}{x-1} = 1 + t(x)$ — 5

$\lim_{x \to +\infty} t(x) = 0$ — 5

$t = \frac{x+2}{x-1} - 1$

$t = \frac{3}{x-1}$ — 5

$x - 1 = \frac{3}{t}$

$x = \frac{3}{t} + 1$ — 5

$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x = \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{3}{t}+1}$ — 5

$= \lim_{t \to 0} \left(\left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^3 \cdot (1+t)\right)$ — 5

$= e^3$ — 5

لأنّ $\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ — 3

و $\lim_{t \to 0} (1+t) = 1$ — 2

40

**السؤال الثاني:** $f(x) = (ax^2+bx+c)\cdot e^{-x}$

نلاحظ أنّ $f(0) = 1$ — 4

ومنه $(a(0)^2 + b(0) + c)e^0 = 1$

وبالتالي $(1) \dots \boxed{c = 1}$ — 5

ونلاحظ أيضاً أن $f(-1) = 0$ — 5

$(a - b + c)\,e = 0$

$(2) \dots \boxed{a - b + c = 0}$ — 5

وكذلك نجد أن $f'(-1) = 0$ — 5

$f'(x) = (2ax+b)e^{-x} - e^{-x}(ax^2+bx+c)$ — 5

$= e^{-x}(2ax + b - ax^2 - bx - c)$

$f'(x) = e^{-x}\left(-ax^2 + (2a-b)x + b - c\right)$

لدينا $f'(-1) = 0$

$e\left(-a + (2a-b)(-1) + b - c\right) = 0$

$-a - 2a + b + b - c = 0$

$(3) \dots \boxed{-3a + 2b - c = 0}$ — 5

نعوض (١) في (٢) $\boxed{a = b - 1}$ — 2

نعوض الأخيرة في (3) فنجد

$-3(b-1) + 2b - 1 = 0$

$-3b + 3 + 2b - 1 = 0$

$-b + 2 = 0$ — 2

$\boxed{b = 2}$

ومنه $\boxed{a = 1}$ — 2

40

فالتابع المطلوب هو

$f(x) = (x^2 + 2x + 1)\,e^{-x}$

أو $f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$

**السؤال الثالث:**

$R = dist(A, P) =$ — 10

$= \frac{|2(2) - 3(-1) + 3 - 4|}{\sqrt{4 + 9 + 1}}$ — 5

$= \frac{6}{\sqrt{14}}$ — 5

معادلة الكرة هي:

$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = \frac{36}{14}$ — 5×4

40

## السؤال الرابع :

$$\left(x^3 - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$$

5 $$T_r = \binom{10}{r}\left(x^3\right)^{10-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r$$

5 $$T_r = \binom{10}{r}(-1)^r\, x^{30-3r}\, x^{-2r}$$

5 $$T_r = \binom{10}{r}(-1)^r\, x^{30-5r}$$

الحد الثابت المستقل عن $x$ يجب أن يحققه

5 $$30-5r=0$$

5 ومنه $\boxed{r=6}$

فهو الحد $T_6$

5 $$T_6 = \binom{10}{6}(-1)^6 = 210$$

2 عندما $30-5r=6$

2 $$5r=24$$

2 $$r=\frac{24}{5}\notin \mathbb{N}$$ مرفوض

2 وبالتالي لا يوجد حدود يحوي $x^6$ في المنشور السابق.

## ثانياً :

### التمرين الأول :

الخاصة المطلوب إثباتها هي :

$E(n)$ : « $3^{2n}+7$ مضاعف للعدد 8 »

ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي $n$.

5 (I) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن

$$3^0+7=8$$

5 وهو مضاعف للعدد 8 .

(II) لنفترض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة،

5 أي يوجد عدد طبيعي $k$ يحقق

5 $$3^{2n}+7=8k$$

5 ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

5 $E(n+1)$ : « $3^{2n+2}+7$ مضاعف للعدد 8 »

5 $$3^{2n+2}+7 = 3^{2n}\cdot 3^2+7$$

5 $$=(8k-7)\cdot 9+7$$

5 $$=72k-63+7$$

$$=72k-56$$

5 $$=8(9k-7)$$

5 وهو مضاعف للعدد 8

5 فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$

فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي

60

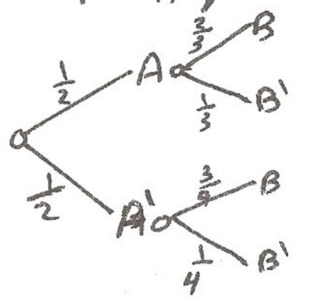
### التمرين الثاني :

5 $$P(A') = 1-P(A) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5 $$P(B'|A) = 1-P(B|A) = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

5 $$P(B'|A') = 1-P(B|A') = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

5 5 5




5 $$P(A'\cap B') = P(A')\cdot P(B'|A') = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

5 $$P(B') = P(A)\cdot P(B'|A) + P(A')\cdot P(B'|A')$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$$

5 $$= \frac{1}{6}+\frac{1}{8} = \frac{14}{48} = \frac{7}{24}$$

5 5 $$P(A'|B) = \frac{P(A'\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{1-\frac{7}{24}}$$

5 $$P(A'|B) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{17}{24}} = \frac{9}{17}$$

60

## التمرين الثالث :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$$

① $u_{n+1} - u_n = 1$

5 فالمتتالية حسابية أساسها $r=1$

5 $u_n = u_0 + rn$

5 $\boxed{u_n = 1 + n}$

② 5 $v_n = e^{-u_n}$

5 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e^{-u_{n+1}}}{e^{-u_n}} = \frac{e^{-u_n-1}}{e^{-u_n}} = e^{-1}$

5 $= \frac{1}{e}$

5 فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $\frac{1}{e}$

5 $v_n = v_0 \, q^n$

3 $v_0 = e^{-1} = \frac{1}{e}$

3 $v_n = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}$

③ 3 $S_n = \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}_{\text{مجموع } n+1 \text{ حداً من حدود}}$

متتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{e}$ وحدها الأول $\frac{1}{e}$

3 $S_n = \frac{1}{e} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}$

3 $S_n = \frac{1}{e-1}\left(1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right)$

2 علماً أن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} = 0$

3 لأن $-1 < \frac{1}{e} < 1$ فإن $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{e-1}}$

60

## التمرين الرابع :

12 $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

3 $P(X=0) = \frac{5\times5\times5}{7\times7\times7} = \frac{125}{343}$

6 $P(X=1) = \frac{2\times5\times5\times3}{7\times7\times7} = \frac{150}{343}$

6 $P(X=2) = \frac{2\times2\times5\times3}{7\times7\times7} = \frac{60}{343}$

3 $P(X=3) = \frac{2\times2\times2}{7\times7\times7} = \frac{8}{343}$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{125}{343}$ | $\frac{150}{343}$ | $\frac{60}{343}$ | $\frac{8}{343}$ |

5

5 $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = \frac{0 + 150 + 120 + 24}{343}$

5 $= \frac{294}{343} = \frac{6}{7}$

حساب التباين

5 $V(X) = \quad - (E(X))^2$

5 $= \left(\frac{150}{343} + \frac{240}{343} + \frac{72}{343}\right) - \frac{36}{49}$

5 $= \frac{462}{343} - \frac{36}{49} = \frac{210}{343} = \frac{30}{49}$

60

## المسألة الأولى:

① $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$ 8

$G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$

② $\vec{EC}(1,1,-1)$ 3

$\vec{EM}=t\vec{EC}\ :\ t\in\mathbb{R}$

$(EC):\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-t+1 \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$ 6

③ $\vec{AF}(1,0,1)$ 3

$\vec{AH}(0,1,1)$ 3

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{AF}$ و $\vec{AH}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $\left(\frac{0}{1}\neq\frac{1}{1}\right)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظمياً على المستوي $(AFH)$ فيكون 3

$\vec{n}\perp\vec{AF}$ ومنه $\vec{n}\cdot\vec{AF}=0$ 3

وبالتالي: $\boxed{a+c=0}$ ...(1) 3

و $\vec{n}\perp\vec{AH}$ ومنه $\vec{n}\cdot\vec{AH}=0$ 3

$\boxed{b+c=0}$ ...(2) 3

نفرض $c=1$ فنجد $a=-1$ و $b=-1$ 3+3

وبالتالي $\vec{n}(-1,-1,1)$ شعاعاً ناظمياً على المستوي $(AFH)$ ومعادلته 3

$(AFH):\boxed{-x-y+z=0}$ 3

④ نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم $(EC)$ في معادلة المستوي $(AFH)$ 3

$-t-t-t+1=0$

$3t=1$

$t=\frac{1}{3}$ 3

فالمستقيم $(EC)$ يقطع المستوي $(AFH)$ في النقطة الموافقة لـ $t=\frac{1}{3}$

$I\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 3

$\vec{EI}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 3

نلاحظ أنه

$\vec{EI}=-\frac{1}{3}\vec{n}$ 3

ومنه $\vec{EI}$ مرتبط خطياً مع $\vec{n}$ 3

ومنه $I$ هي المسقط القائم للنقطة $E$ على المستوي $(AFH)$. 3

⑤ $\vec{HI}\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 3

$\vec{AF}(1,0,1)$ 3

$\vec{HI}\cdot\vec{AF}=\frac{1}{3}+0-\frac{1}{3}=0$ 3

ومنه $(AF)\perp(HI)$ 2

$\vec{AI}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ 3

$\vec{HF}(1,-1,0)$ 3

$\vec{AI}\cdot\vec{HF}=0$ 3

ومنه $(AI)\perp(HF)$ 2

ومنه $I$ هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث $(AFH)$ وهي نقطة تلاقي متوسطاته لأنه مثلث متساوي الأضلاع (أضلاعه أقطار المكعب). 2

ومنه $I$ مركز ثقل المثلث $AFH$. 2

100

**المسألة الثانية:**

$f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$

① $f$ معرف على $]-\infty, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ مقارب أفقي منطبق على $xx'$

$f(x) = e^{x}(e^{x} - 2)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

لأن $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} (e^{x} - 2) = +\infty$

$f(x) = e^{x}(e^{x} - 2)$

لما كان $e^{x} > 0$ فإن إشارة $f$ من إشارة $e^{x} - 2$ وتنعدم عند $x = \ln 2$

| $x$ | $-\infty$ | $\ln 2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| الوضع النسبي | يقع تحت المقارب | $(\ln 2, 0)$ نقطة مشتركة | يقع فوق المقارب |

② $f$ اشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x}$

$= 2e^{x}(e^{x} - 1)$

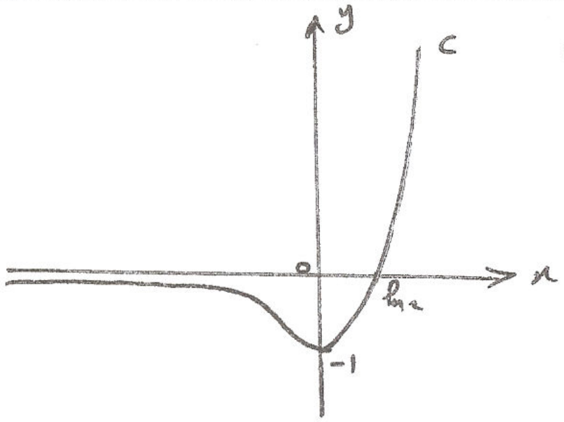
إشارة $f'(x)$ تماثل إشارة $e^{x} - 1$

حيث تنعدم عند $x = 0$

$f(0) = -1$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $0 \searrow$ | $-1$ | $\nearrow +\infty$ |

③




④ $g(x) = (f(x)+1)^{5} \cdot e^{x}$

$= (e^{2x} - 2e^{x} + 1)^{5} e^{x}$

$= ((e^{x} - 1)^{2})^{5} \cdot e^{x}$

$= (e^{x} - 1)^{10} \cdot e^{x}$

$g$ مستمرة على $\mathbb{R}$

$G(x) = \frac{(e^{x} - 1)^{11}}{11}$

100

انتهت الأجوبة.