أولاً: حل المتراجحة (40 درجة)

$(3)^{x+1}+2(3)^{-x}\le 7$

3 لنحل المعادلة $(3)^{x+1}+2(3)^{-x}-7=0$

3 $3(3)^{x}+\frac{2}{(3)^{x}}-7=0$

3 $3(3)^{2x}-7(3)^{x}+2=0$

نفرض $(3)^{x}=t$ نعوض

3 $3t^2-7t+2=0$

$\Delta=49-24=25 \qquad \sqrt{\Delta}=5$

3+3 إما $t=\frac{7+5}{6}=2$ أو $t=\frac{7-5}{6}=\frac{1}{3}$

3+3 ومنه $(3)^{x}=2$ ، $(3)^{x}=\frac{1}{3}=(3)^{-1}$

3+3 $x\ln3=\ln2$ ، ومنه $x=-1$

3 $x=\frac{\ln2}{\ln3}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{\ln2}{\ln3}$		$+\infty$
المقدار (3)		+	0	−	0	+	
المتراجحة (2)		//////		محققة		//////	

2 إذاً $x\in[-1,\frac{\ln2}{\ln3}]$

40 المجموع

السؤال الثاني:

5 من الرسم نجد $f(0)=2$

5 بالتعويض $2=0+b+0\Rightarrow b=2$

من الرسم نلاحظ أن المماس يمر من $(0,2)$ و $(2,0)$

إذاً ميله m :

10 $m=\frac{2-0}{0-2}=-1$

الميل هو القيمة العددية للمشتق عند $x=0$

5 ومنه $m=f'(0)=-1$

5 $f'(x)=a+e^{x}+xe^{x}$

5 $-1=a+1\Rightarrow a=-2$

5 يصبح: $f(x)=-2x+2+xe^{x}$

40 المجموع

السؤال الثالث:

10 أياً كانت $M(x,y,z)\in Q$ فإن $MB=MC$

10 $\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+4)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2}$

10 بالتربيع والإصلاح نجد $x-y-z-2=0$

10 وهي معادلة المستوي المحوري

40

السؤال الرابع (40 درجة)

① يلزم لرسم مثلث إختيار ثلاث نقط من أصل خمسة وذلك يتم بـ $\binom{5}{3}$ طريقة 5

10 عدد المثلثات $=\binom{5}{3}=10$

② القطع المستقيمة الواصلة بين خمس نقاط هي إما أضلاع أو أقطار 5

عدد القطع المستقيمة = (عدد الأضلاع) + (عدد الأقطار)

5 إذاً عدد الأقطار $=\binom{5}{2}-5=5$

* يلزم لنقطة تقاطع قطرين إختيار أربع نقاط من رؤوس المخمس من أصل 5 — 5

إضافة الى أن كل رأس من رؤوس المخمس هو نقطة تقاطع قطرين فيه 5

إذاً عدد نقط تقاطع الأقطار هو

5 $\binom{5}{4}+5=5+5=10$

40 المجموع

ثانياً: حل التمارين

60 درجة لكل تمرين

التمرين الأول:

5 من أجل $E(0)$ نجد $(5)^0\ge(4)^0+(3)^0$ غير محققة

5 من أجل $E(1)$ نجد $(5)^1\ge(4)^1+(3)^1$ = =

5 من أجل $E(2)$ نجد $(5)^2\ge(4)^2+(3)^2$ محققة

5 إذاً أصغر عدد طبيعي يحقق المتراجحة $n=2$

الإثبات بالتدريج من أجل $n \geq 2$

5 ① وجدنا أن $E(2)$ محققة

5 ② نفرض أن $E(n)$ صحيحة أي الفرض

$$(5)^n \geq (4)^n + (3)^n$$

لنبرهن أن $E(n+1)$ صحيحة

5 أي الطلب: $(5)^{n+1} \geq (4)^{n+1} + (3)^{n+1}$

الإثبات:

5 فرضاً $(5)^n \geq (4)^n + (3)^n$

5 $5\cdot(5)^n \geq 5(4)^n + 5(3)^n$

5 $(5)^{n+1} \geq 4(4)^n + (4)^n + 3(3)^n + 2(3)^n$

5 $(5)^{n+1} \geq (4)^{n+1} + (3)^{n+1} + \underbrace{(4)^n + 2(3)^n}$

5 مقدار موجب تماماً

5 ومنه $(5)^{n+1} \geq (4)^{n+1} + (3)^{n+1}$

60

وهو المطلوب

التمرين الثاني: الاحتمال.

5 $P(F) = \frac{80}{100} \Rightarrow P(F') = \frac{20}{100}$

فرضاً $P(M|F') = \frac{25}{100}$

5 $P(M\cap F') = P(F')\cdot P(M|F')$

5 $= \frac{20}{100}\cdot\frac{25}{100} = \frac{5}{100}$

* لدينا

5 $P(M) = P(M\cap F) + P(M\cap F')$

5 $\frac{70}{100} = P(M\cap F) + \frac{5}{100}$

5 $P(M\cap F) = \frac{65}{100}$

المطلوب في السؤال ① $P(M|F)$

١٠ $P(M|F) = \frac{P(M\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{65}{100}}{\frac{80}{100}} = \frac{65}{80}$

المطلوب في السؤال ② $P(F|M)$

5 $P(F|M) = \frac{P(F\cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{65}{100}}{\frac{70}{100}} = \frac{65}{70}$

5 المطلوب في السؤال ③ $P(M\cup F')$

5 $P(M\cup F') = P(M) + P(F') - P(M\cap F')$

5 $= \frac{70}{100} + \frac{20}{100} - \frac{5}{100} = \frac{85}{100}$

60

التمرين الثالث: المتتالية:

① إثبات أن $u_n > 0$ بالتدريج $n \geq 1$:

3 • فرضاً $u_1 = \frac{1}{2} > 0$ إذاً $E(1)$ محققة

3 • نفرض أن $E(n)$ محققة أي $u_n > 0$

3 لنبرهن أن $E(n+1)$ محققة أي $u_{n+1} > 0$

لدينا

3 $n \geq 1 \begin{cases} n+1 \geq 2 \\ 2n \geq 2 \end{cases} \frac{n+1}{2n} > 0$

3 ومنه $\frac{n+1}{2n} u_n > 0$

3 أي $u_{n+1} > 0$ إذاً $E(n+1)$ محققة

حساب النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

لدينا $n \geq 1$ إذاً $2n \geq n+1$

3 ومنه $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1$

3 فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متناقصة

3 المتتالية متناقصة محدودة من الأدنى فهي متقاربة

3 ② فرضاً $v_n = \frac{u_n}{n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1}$

5 $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{u_{n+1}}{n+1}}{\frac{u_n}{n}} = \frac{(n+1)\,u_n}{2n\,(n+1)}\cdot\frac{n}{u_n} = \frac{1}{2}$

5 فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

5 $v_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $\lim_{n\to\infty}(v_n) = 0$

5 $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

تتمة التمرين الثالث :

3 $u_n = \frac{n}{(2)^n} = \frac{n}{e^{n\ln 2}}$

3 $u_n = \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{n\ln 2}{e^{n\ln 2}}$

2 وبما أن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$

2 إذاً $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 0$

60

التمرين الرابع :

① A الحدث المطلوب

5 $P(A) = \frac{1}{(10)^3} = \frac{1}{1000}$

② عدد طرق اختيار الخانة الأولى 10

5 = = = = الثانية 9

= = = = الثالثة 9

5 $n(B) = 10\cdot 9\cdot 9 = 810$

5 $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{10\cdot 9\cdot 9}{10\cdot 10\cdot 10} = \frac{81}{100}$

③ 4 $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

بفرض A حدث ظهور الرقم 9 لمرة واحدة في الرماز

3 $P(X=3) = P(A,A,A) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$

6 $P(X=2) = P(A,A,A')\cdot 3 = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot 3 = \frac{27}{100}$

6 $P(X=1) = P(A,A',A')\cdot 3 = \frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot 3 = \frac{24}{100}$

3 $P(X=0) = P(A'A'A') = \frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10} = \frac{729}{1000}$

3

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{729}{1000}$	$\frac{243}{1000}$	$\frac{27}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

وهو القانون الاحتمالي

حساب التوقع الرياضي

3 $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\cdot P_i$

$E(X) = \left(1\cdot\frac{243}{1000}\right) + \left(2\cdot\frac{27}{1000}\right) + \left(3\cdot\frac{1}{1000}\right)$

3 $E(X) = \frac{300}{1000} = \frac{3}{10}$

حساب التباين :

x^2 : 0 1 4 9

P : $\frac{729}{1000}$ $\frac{243}{1000}$ $\frac{27}{1000}$ $\frac{1}{1000}$

3 $\sum x_i^2 P_i = \frac{243+108+9}{1000} = \frac{360}{1000}$

دستور التباين

3 $V(X) = \sum x^2 p - (E(X))^2$

$V(X) = \frac{36}{100} - \frac{9}{100} = \frac{27}{100}$

3 $V(X) = 0.27$

360

ثالثاً: حل المسألة الأولى (100 درجة)

5 ① $\vec{AB}(-1,-1,2)$

5 $\vec{AC}(-2,1,1)$

نلاحظ أن $\frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{1}$

إذاً $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً

5 بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي ABC فيكون

$\vec{n} \perp \vec{AB}$ ومنه $\vec{n}\cdot\vec{AB}=0$

5 (1) $\boxed{-a-b+2c=0}$

أيضاً

5 $\vec{n} \perp \vec{AC}$ ومنه (2) $\boxed{-2a+b+c=0}$

5 نفرض $c=1$ فنجد:

$-a-b=-2$

5 $-2a+b=-1$

بالجمع $-3a=-3$

5 $\boxed{a=1}$

5 ومنه $\boxed{b=1}$

5 يصبح $\vec{n}(1,1,1)$

وبفرض (x,y,z) نقطة ما من المستوي المطلوب نجد معادلة المستوي

$1(x-3)+1(y-1)+1(z-1)=0$

5 ومنه $x+y+z-5=0$

وهي معادلة المستوي ABC

55

② a) 3 لدينا $\vec{BC}(-1,2,-1)$

3 $\|\vec{BC}\| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

3 $\|AB\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

3 $\|\vec{AC}\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

2 فالمثلث ABC متساوي الأضلاع

ب) نحسب $\vec{GA}\cdot\vec{BC}$

حيث $\vec{GA}(1,0,-1)$

3 $\vec{GA}\cdot\vec{BC} = (1)(-1)+(0)(2)+(-1)(-1)=0$

ومنه $\vec{GA} \perp \vec{BC}$

وبما أن المستقيم T يعامد الشعاع $\vec{GA}$

3 و T ، BC واقعان في مستوٍ واحد

إذاً $\vec{BC}$ شعاع توجيه للمستقيم T

إذاً المعادلات الوسيطية للمستقيم T

5 $$\begin{cases} x = 3-t \\ y = 1+2t \\ z = 1-t \end{cases} ;\ t\in\mathbb{R}$$

25

③ a) مساحة المثلث متساوي الأضلاع

3 $A(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

3 $= \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) حجم رباعي الوجوه يساوي 3

3 $V = \frac{1}{3}\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot h$

$3 = \frac{1}{3}\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\ h$

3 ومنه $h = 2\sqrt{3}$

$h = dist(M, ABC)$

2 $2\sqrt{3} = \frac{|1+7+\alpha-5|}{\sqrt{3}}$

2 $6 = |3+\alpha|$

إما | أو

2 $3+\alpha=6$ | $3+\alpha=-6$

2 $\boxed{\alpha=3}$ | $\boxed{\alpha=-9}$

20

مدارس الأوائل النموذجية

الخاصة للبنات — سلم الرياضيات – الثالث الثانوي العلمي – النموذج (A) 5

حل المسألة الثانية : (100 درجة)

$f(x) = (1-x)\,e^{x}$

5 ① f معرف واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

لأن :

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{x}) = +\infty$ و

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$

$f(x) = e^{x} - x\,e^{x}$

5 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

لأن

5 $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{x}) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} (x\,e^{x}) = 0$

5 ومنه $\boxed{y = 0}$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$f'(x) = -e^{x} + e^{x}(1-x)$

10 $\boxed{f'(x) = -x\,e^{x}}$

5 $f'(x) = 0$ عندما $x = 0$

5 $f(0) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

(5 ، 5)

5 $f(0) = 1$ قيمة كبرى محلياً

5 ② $f'(1) = e$

5 $f'(-1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

5 $f'(1) \cdot f'(-1) = -1$

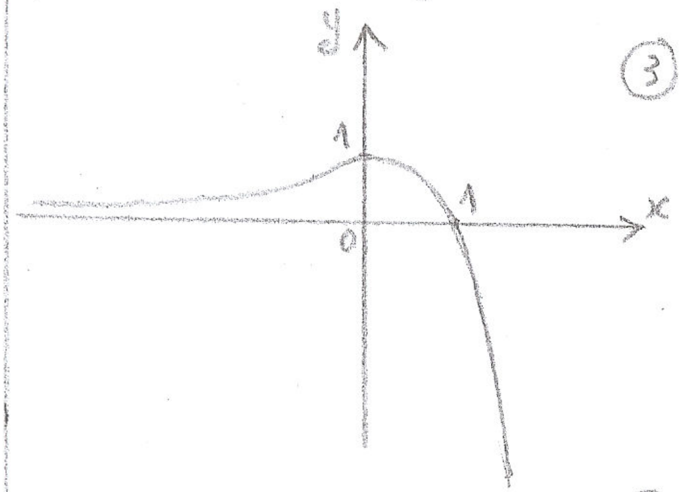
$m_1 \cdot m_2 = -1$

5 فالمماسان متعامدان

حيث المماس الأول يمس C عند النقطة التي فاصلتها 1

والمماس الثاني " " " " " " -1

③

5 

④ F اشتقاقي على R

$F'(x) = e^{x}(2-x) - e^{x}$

5 $F'(x) = e^{x}(2-x-1)$

$F'(x) = e^{x}(1-x)$

ومنه

$F'(x) = f(x)$

5 إذاً F تابع أصلي للتابع f على R

100 المجموع

ملاحظات :

- إذا كتبت الطالبة طريقة أخرى للسؤال ما يقدم المصحح بتوزيع درجة هذا السؤال على مراحل الحل
- لا تحاسب الطالبة على الخطأ الحسابي مرتين