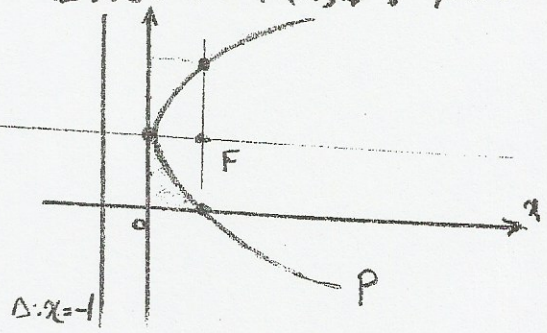
أولاً :

$P : (y-2)^2 = 4x$

10 الذروة $V(0,2)$ ، المحور المحرقي (التناظري) $// (xx')$

$\Delta : x = -1$ ، $F(1,2)$ ، $p = 1$

10




5+5 $(y-2)^2 = 4x \to y-2 = 2\sqrt{x} \Rightarrow f_1(x) = 2\sqrt{x}+2 \;;\; y \geq 2$

$(y-2)^2 = 4x \to y-2 = -2\sqrt{x} \Rightarrow f_2(x) = -2\sqrt{x}+2 \;;\; y \leq 2$

5+5 $V = \int_0^1 \pi . f_2^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 (4x - 8\sqrt{x} + 4)\,dx$

5 $= \pi\left[2x^2 - \frac{16}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x\right]_0^1$

5 $= \pi\left[2 - \frac{16}{3} + 4 - 0\right] = \frac{2\pi}{3}$

50

ثانياً :

(1) $C : f(x) = \ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \;:\; x \in ]0, +\infty[$

طول القوس

5 $l = \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$

لكن

5 $f'(x) = \dfrac{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'}{\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)}$

5 $= \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} \cdot \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

5 $= \dfrac{2e^x}{(e^x+1)(e^x-1)} = \dfrac{2e^x}{e^{2x}-1}$

$f'^2(x) = \dfrac{4e^{2x}}{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}$

$1 + f'^2(x) = \dfrac{4e^{2x} + e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}$

5 $= \dfrac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{4x} - 2e^{2x} + 1} = \dfrac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}$

5 $\sqrt{1 + f'^2(x)} = \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

5 $l = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \dfrac{e^{2x}+e^{2x}-e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx$

5 $= \int_{\ln 2}^{\ln 4} \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} - \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}-1}\,dx$

5 $= \left[\ln(e^{2x}-1) - x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$= (\ln(15) - \ln 4) - (\ln 3 - \ln 2)$

$= \ln(15) - \ln(4) - \ln(3) + \ln(2)$

5 $= \ln\left(\dfrac{15 \cdot 2}{4 \cdot 3}\right) = \ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$

50

(C) أحد جذري المعادلة $Z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$

10 $4Z^2 + KZ + 1 = 0$ (ذات الأمثال الحقيقية)

10 إذاً الجذر الآخر هو مرافق الأول أي

10 $Z_2 = \overline{Z_1} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$

10 ونعلم أن $Z_1 + Z_2 = -\frac{b}{a}$

20 $2\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{K}{1} \Rightarrow \boxed{K = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

60

② $A(-2,0,1)$ ، $B(1,0,-3)$ ، $C(1,-1,2)$

الحل: تعيين ناظماً للمستوي $P$ ولتكن

$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$

5+5 $\vec{AB} = (3,0,-4)$ ، $\vec{AC} = (3,-1,1)$

وهما شعاعان غير مرتبطين خطياً فهما يعينان مستوٍ.

5+5 $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 15\vec{j} - 3\vec{k}$

$\vec{n}$ ناظم لـ $P$ ويمر من $A(-2,0,1)$ مثلاً

10 $P: -4(x+2) - 15(y-0) - 3(z-1) = 0$

$P: -4x - 15y - 3z - 5 = 0$

10 أو $P: 4x + 15y + 3z + 5 = 0$

حساب بعد $M(7,-1,4)$ عن $P$

10 $l = \dfrac{|4(7)+15(-1)+3(4)+5|}{\sqrt{16+225+9}}$

10 $= \dfrac{30}{\sqrt{250}} = \dfrac{30}{5\sqrt{10}} = \dfrac{6}{\sqrt{10}}$

60

ثالثاً:

① $f(x) = x\sqrt{3-x}$ : $x \in ]-\infty, 3[$

دراسة اطراد الدالة وتعيين القيمة الكبرى الشاملة

5 • $f$ معرفة ومستمرة على $]-\infty, 3]$

5 واشتقاقية على $]-\infty, 3[$

10 $f'(x) = \dfrac{1\sqrt{3-x}}{1} + x\dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}}$

10 $f'(x) = \dfrac{2(3-x) - x}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}$

5 $(x=2, f(2)=2) \Leftarrow f'(x) = 0$

10

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | |

5 ونلاحظ أنه أياً كان $x \in ]-\infty, 3]$

فإن $f(x) \leq 2$

أي أن $f(2) = 2$ قيمة كبرى شاملة

ⓒ $I = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\sqrt{3-x}\,dx$

طريقة أولى: بالتجزئة

5 $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$

5 $v'(x) = (3-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v(x) = -\dfrac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$

5 $I = [u \cdot v]_0^2 - \int_0^2 u' \cdot v\,dx$

$= \left[-x \cdot \dfrac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 + \dfrac{2}{3}\int_0^2 (3-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$

5 $= \left[-\dfrac{2}{3}x\sqrt{(3-x)^3}\right]_0^2 - \dfrac{2}{3} \cdot \left[\dfrac{(3-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^2$

5 $= \left[-\dfrac{2}{3}x\sqrt{(3-x)^3}\right]_0^2 - \dfrac{4}{15}\left[\sqrt{(3-x)^5}\right]_0^2$

$= \left[-\dfrac{4}{3}\right] - \dfrac{4}{15}\left[(1) - (9\sqrt{3})\right]$

5 $= -\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{15} + \dfrac{12}{5}\sqrt{3} = \dfrac{12}{5}\sqrt{3} - \dfrac{8}{5}$

$\boxed{80}$

طريقة ثانية:

5 $f(x) = -(\underline{3-x}+3)(3-x)^{\frac{1}{2}}$

$= -\left[(3-x)^{\frac{3}{2}} + 3(3-x)^{\frac{1}{2}}\right]$

5
5 $\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\dfrac{(3-x)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\dfrac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2$ 10

5 $I = \left[\frac{2}{5}\sqrt{(3-x)^5} - 2\sqrt{(3-x)^3}\right]_0^2$

5 $= \left(\frac{2}{5}-2\right) - \left(\frac{18\sqrt{3}}{5} - 6\sqrt{3}\right)$

5 $= \frac{12\sqrt{3}}{5} - \frac{8}{5}$

يمكن للطالبة بطريقة أخرى كتغيير المتحول

السؤال الثاني

معادلة القطع :

مركز القطع هو نقطة تقاطع المقاربين

10 جمع المعادلتين نجد $2x+4=0 \Leftarrow x_0=-2$

10 بطرح المعادلتين $2\sqrt{2}y-6\sqrt{2}=0 \Leftarrow y_0=3$

5 إذاً $O'(-2,3)$

10 المحور المحرقي // $ox \Leftarrow \frac{(x+2)^2}{a^2}-\frac{(y-3)^2}{b^2}=1$

5+10 ميل المقارب $\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftarrow \boxed{a=\sqrt{2}b}$ ①

10 $M(1,1)$ تنتمي للقطع $\Leftarrow \frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$

5+5 نعوض ① فنجد : $\frac{9}{2b^2}-\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{2b^2}=1$

5+5 $b^2=\frac{1}{2} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{2}}, a=1$

معادلة القطع

10 $\frac{(x+2)^2}{1}-\frac{(y-3)^2}{\frac{1}{2}}=1$

(90)

السؤال الثالث:

10 $\sigma_x=\sqrt{\overline{x^2}-\bar{x}^2}=\sqrt{33-(5)^2}=\sqrt{8}$

10 $\sigma_y=\sqrt{\overline{y^2}-\bar{y}^2}=\sqrt{753-625}$

$=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

10 $\sigma_{xy}=\overline{x\cdot y}-\bar{x}\cdot\bar{y}=157-5\times25$

$=32$

10 $r_{xy}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}=\frac{32}{\sqrt{8}\times8\sqrt{2}}=\frac{32}{32}=1$

10 والارتباط بين المتغيرين تام إيجابي.

(50)

السؤال الرابع

5 $\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

5 $=\frac{1}{-8i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3$

10 $=\frac{-1}{8i}\left(e^{i3\theta}-3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}-e^{-i3\theta}\right)$

$=\frac{-1}{8i}\left(e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}-3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right)$

5 $=\frac{-1}{4}\left[\frac{e^{i3\theta}-e^{-i3\theta}}{2i}-3\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right]$

5 $=-\frac{1}{4}\left[\sin3\theta-3\sin\theta\right]$

5+5 $\int\sin^3\theta\cdot d\theta=-\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}\cos3\theta+3\cos\theta\right]+C$

$=\frac{1}{12}\cos3\theta-\frac{3}{4}\cos\theta+C$

(40)

رابعاً:

$C: f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+3} : x \in R \setminus \{1,3\}$

5 ① f معرف ومستمر واشتقاقي على كل من المجالات

$]-\infty,1[ \,،\, ]1,3[ \,،\, ]3,+\infty[$

5 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \,,\, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

ونلاحظ أن $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$

5 $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x) = \dfrac{1}{-0\times-3} = +\infty$

5 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x) = \dfrac{1}{+0\times-3} = -\infty$

5 $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 3} f(x) = \dfrac{1}{2\times-0} = -\infty$

5 $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 3} f(x) = \dfrac{1}{2\times+0} = +\infty$

5 ونلاحظ أن $y=0$ مقارب منطبق على $xx'$

وهو مقارب له في جوار $+\infty$ و جوار $-\infty$

والمستقيم $x=1$ مقارب $// \, yy'$

5 والمنحني على يسار المقارب بجوار $+\infty$ وعلى يمينه بجوار $(-\infty)$

المستقيم $x=3$ مقارب $// \, yy'$

5 والمنحني على يسار المقارب عند $-\infty$ وعلى يمينه عند $+\infty$

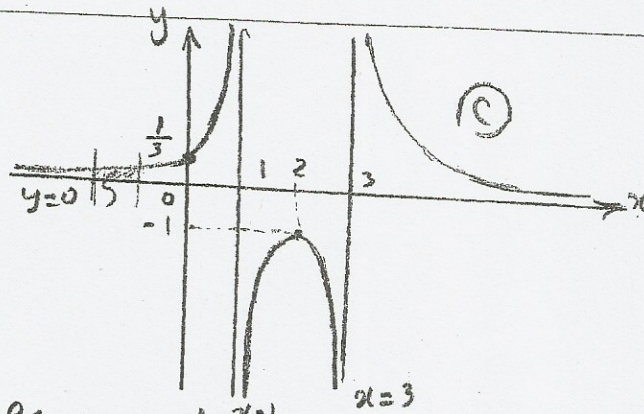
5 $f'(x) = \dfrac{-(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2}$

$(f(2)=-1 \,،\, x=2) \Leftarrow f'(x)=0$

5

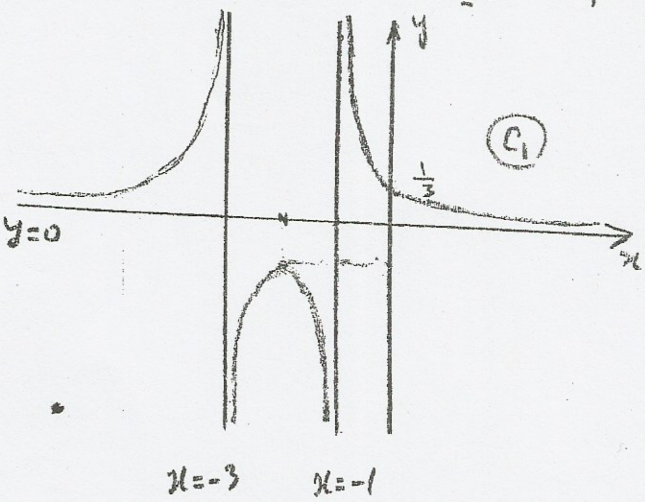
| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty \,\|\|\, -\infty$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-\infty \,\|\|\, +\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

قيمة كبرى محلياً $f(2)=-1$

5 


$f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2-4(-x)+3} = \dfrac{1}{x^2+4x+3} = f_1(x)$

5 $C_1$ هو نظير $C$ بالنسبة لـ $yy'$.

5 


② المعادلة:

$\lambda x^2-1 = (4x-3)\lambda \Rightarrow$

$\lambda x^2-4\lambda x+3\lambda=1 \Rightarrow$

$\lambda(x^2-4x+3)=1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{x^2-4x+3}$

5 وهي تكتب $f(x)=\lambda$

من الخط البياني C نلاحظ

5 ١) $\lambda<-1$ للمعادلة حلان

$1<x_1<2$ و $2<x_2<3$

5 ٢) $\lambda=-1$ للمعادلة حل وحيد (جذر مضاعف)

هو $x=2$

5 ٣) $-1<\lambda\leq 0$ : المعادلة مستحيلة الحل

5 ٤) $\lambda>0$ للمعادلة حلان

$x_1<1 \,،\, x_2>3$

٤) مساحة السطح المحصور بين C وكل من
$x=-2$ و $x=-1$ و محو

5 $S=\int_{-2}^{-1}\frac{1}{(x-1)(x-3)}\,dx$

لكن
$\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$

نضرب بـ $(x-1)$ ثم نجعل $x\to 1$

5 $\frac{1}{-2}=A+0\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$

نضرب بـ $(x-3)$ ثم نجعل $x\to 3$

5 $\frac{1}{2}=0+B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$

$S=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-3}\right)dx$

5 $=\left[\frac{-1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-3|\right]_{-2}^{-1}$

$S=\left(-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 4\right)-\left(\frac{-1}{2}\ln 3+\frac{1}{2}\ln 5\right)$

$=\frac{1}{2}\left[-\ln 2+\ln 4+\ln 3-\ln 5\right]$

5 $=\frac{1}{2}\ln\frac{4\times 3}{2\times 5}=\frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}$

120