أولاً: حساب الحجم (50 درجة)

10 $V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

5 $V=\int_1^4 \pi (x-\sqrt{x})^2\,dx$

10 $V=\pi\int_1^4 (x^2-2(x)^{\frac32}+x)\,dx$

15 $V=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac45\sqrt{x^5}+\frac{x^2}{2}\right]_1^4$

5 $V=\pi\left[\left(\frac{64}{3}-\frac45(32)+8\right)-\left(\frac13-\frac45+\frac12\right)\right]$

5 $V=\frac{37}{10}\pi$

المجموع 50

ثانياً: التمرين الأول (50 درجة)

5 $f_1(x)=f_2(x)$

$-x^2+2x=x^2-4$

$2x^2-2x-4=0$

$x^2-x-2=0$

5 $(x-2)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$

5 c_1 و c_2 يتقاطعان في النقطتين $(-1,-3)$ و $(2,0)$

5 ضمن المجال $[-1,2]$ نجد $f_1(x)>f_2(x)$

10 $S=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]\,dx$

5 $S=\int_{-1}^2(-2x^2+2x+4)\,dx$

15 $S=\left[-2\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right]_{-1}^2$

$S=\left[\frac{-16}{3}+4+8\right]-\left[\frac23+1-4\right]$

5 $S=\left[\frac{20}{3}\right]-\left[\frac23-3\right]=9$ وحدة مساحة

المجموع 50

التمرين الثاني: الأعداد العقدية (60 درجة)

$|z+3-i|=|iz+2+5i|$

10 $|x+iy+3-i|=|i(x+iy)+2+5i|$

10 $|(x+3)+i(y-1)|=|(-y+2)+i(x+5)|$

20 $\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(-y+2)^2+(x+5)^2}$

5 $(x+3)^2+(y-1)^2=(-y+2)^2+(x+5)^2$

10 $\cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2}-2y+1=\cancel{y^2}-4y+4+\cancel{x^2}+10x+25$

5 $4x-2y+19=0$ المعادلة الديكارتية لمجموعة النقط

المجموع 60

التمرين الثالث: هندسة الفضاء (60) درجة

15 $\vec{BC}(0,-1,5)$

$M\left(\frac{1+1}{2},\frac{-1+0}{2},\frac{-3+2}{2}\right)$

15 $M\left(1,\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$

بفرض $N(x,y,z)\in P$

15 $\vec{NM}\left(x-1,y+\frac12,z+\frac12\right)$

من شرط تعامد $\vec{BC}$ و $\vec{NM}$ نجد

معادلة المستوي المطلوب

10

5 $0(x-1)-1\left(y+\frac12\right)+5\left(z+\frac12\right)=0$

$-y+5z+2=0$

المجموع 60

ثالثاً: السؤال الأول (80 درجة)

5 الدالة معرفة على $]0,+\infty[$ مستمرة واشتقاقية على هذا المجال

10 $f'(x)=\frac{x}{4}-\frac1x=\frac{x^2-4}{4x}$

5 $f'(x)=0$ لما $x=2 \Rightarrow f(2)=-\ln 2$

5

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	$-\ln 2$	$\nearrow$	

من الجدول نجد أنه أياً كان $x\in]0,+\infty[$ فإن

5 $f(x)\geq f(2) \Leftarrow f(x)\geq -\ln(2)$

إذاً $f(2)=-\ln 2$ قيمة صغرى شاملة

حساب طول القوس الواقع للمجال $[1,e]$

10 $L=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,.\,dx$

5 $f'^2(x)=\frac{(x^2-4)^2}{16x^2}$

5 $1+f'^2(x)=1+\frac{(x^2-4)^2}{16x^2}$

$1+f'^2(x)=\frac{16x^2+x^4-8x^2+16}{16x^2}$

5 $1+f'^2(x)=\frac{(x^2+4)^2}{16x^2}$

5 $\sqrt{1+f'^2(x)}=\frac{x^2+4}{4x}$

$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{x}$

5 $L=\int_1^e\left[\left(\frac{1}{4}x\right)+\frac{1}{x}\right]dx$

10 $L=\left[\frac{x^2}{8}+\ln|x|\right]_1^e$

$L=\left[\frac{e^2}{8}+1\right]-\left[\frac{1}{8}+0\right]$

5 $L=\frac{e^2+7}{8}$

80 المجموع

السؤال الثاني (القطوع 90 درجة)

5 $\frac{(x+2)^2}{1}-\frac{(y-3)^2}{\frac{1}{2}}=1$

10 * قطع زائد مركزه $O'(-2,3)$

5 * محوره المحرقي يوازي OX

5 5 $a^2=1$ ، $a=1$ ، $b^2=\frac{1}{2}$ ، $b=\frac{1}{\sqrt2}$

الذروتان:

10 $A(x_0+a,y_0)$ $A'(x_0-a,y_0)$

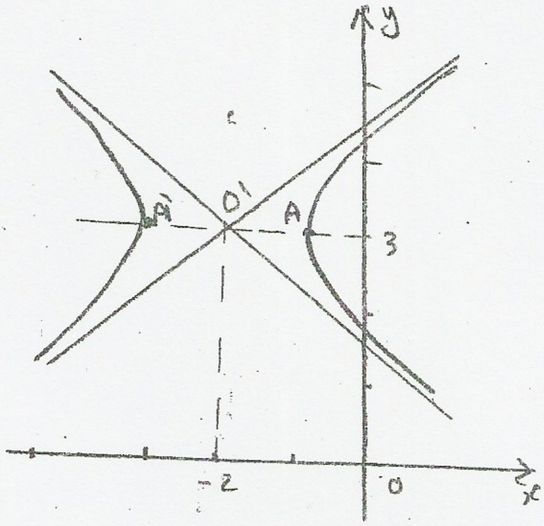
$A(-1,3)$ $A'(-3,3)$

المقاربان:

10 $y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$

$y-3=\pm\frac{1}{\sqrt2}(x+2)$

5+5



التحقق $M(1,1)\overset{?}{\in}H$

5 $(1+2)^2-2(1-3)^2\overset{?}{=}1$

$9-2(4)=1$ محقق.

10 لحساب ميل المماس نشتق بالنسبة لـ x

$2(x+2)-4(y-3)y'_x=0$

5 من أجل $x=1$ $y=1$ $y'_x=m$

5 $2(3)-4(-2)m=0$

$m=\frac{-3}{4}$

معادلة المماس:

5 $y-1=\frac{-3}{4}(x-1)$

طريقة ثانية لحساب ميل المماس:

$m=\frac{b^2}{a^2}\,\frac{u-x_0}{v-y_0}$

$m=\frac{1}{2}\,\frac{1+2}{1-3}=\frac{-3}{4}$

90 المجموع

السؤال الثالث الأعداد العقدية (90 درجة)

التحقق بالتعويض: نعوض $z_1=1-i$

5 $(1-i)^2-3(1-i)+3-i\overset{?}{=}0$

$(\cancel{1}-2i+\cancel{i^2})-\cancel{3}+3i+\cancel{3}-i$

5 $-2i+3i-i=0$

محقق

ومنه $z_1=1-i$ جذر للمعادلة

لإيجاد الجذر الآخر: نستخدم خاصة مجموع الجذرين: $z_1+z_2=\frac{-b}{a}=3$ 5

$1-i+z_2=3 \Rightarrow z_2=2+i$ 5

[2] إيجاد الجذرين التربيعيين

نفرض $W=x+iy$ أحد الجذرين

فيكون $W^2=Z$ 5

$(x+iy)^2=1-i$

$x^2-y^2=1$ و $2xy=-1$ 5×4

$x^2+y^2=|z|=\sqrt{2}$ ومنه إشارتين متعاكستين y و x.

بالجمع $2x^2=\sqrt{2}+1$ ، $x^2=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ ، $x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$ 5+5

بالطرح $2y^2=\sqrt{2}-1$ ، $y^2=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ، $y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ 5+5

$W_1=+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ 5

$W_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ 5

(3) $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_2+z_1}{z_1 z_2}$ 5

$=\frac{3}{3-i}=\frac{3(3+i)}{9+1}$ 5

$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{9}{10}+\frac{3}{10}i$ 5

المجموع 90

رابعاً: مسألة التحليل الرياضي (120 درجة)

$f(x)=(1-x)e^x$

الدالة معرفة ومستمرة واشتقاقية على R 5

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=-\infty$ 5

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}[e^x-xe^x]=0$ (مبرهنة) 5

$y=0$ مقارب مواز xx' في جوار $-\infty$. 5

$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$ 10

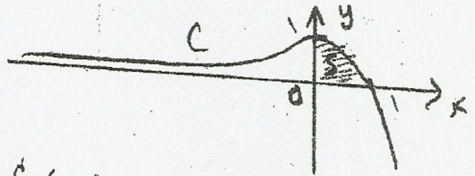
5 $f'(x)=0 \quad x=0 \quad f(0)=1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

(5، 5، 5)

$f(0)=1$ قيمة كبرى محلياً

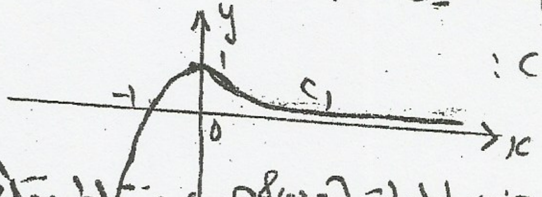
10 الرسم:



5 $f_1(x)=\frac{1+x}{e^x}=(1+x)e^{-x}=f(-x)$

5 ومنه C_1 نظير C بالنسبة لـ $y'y$.

5 رسم C_1:



(2) عدد جذور المعادلة $f(x)=\lambda$ هو عدد نقاط تقاطع المستقيم $y=\lambda$ مع الخط (C) (اعتماداً على (C) نجد)

5 $\lambda>1 \Leftrightarrow$ المعادلة $f(x)=\lambda$ مستحيلة

5 $\lambda=1 \Leftrightarrow$ للمعادلة حل مضاعف هو صفر

5 $\lambda\in]0,1[\Leftrightarrow$ للمعادلة حلان

5 $\lambda\leq 0 \Leftrightarrow$ للمعادلة حل وحيد

حساب المساحة:

5 $S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^1(1-x)e^x\,dx$

نكامل بالتجزئة: نفرض

5 $u=1-x$ ، $u'_x=-1$

5 $v'_{(x)}=e^x$ ، $v=e^x$

5 $S=[(1-x)e^x]_0^1-\int_0^1 -e^x\,dx$

5 $S=[(1-x)e^x+e^x]_0^1$

$S=[2e^x-xe^x]_0^1$

$S=(2e-e)-(2-0)$

5 $S=e-2$ وحدة مساحة

المجموع 120