١

سلم المذاكرة الثانية – مادة الرياضيات
الثالث الثانوي العلمي نموذج (ب)

أولاً: باستخدام دستور أولر

10 $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

5 $\sin^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$

5 $\sin^3\theta = \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^3$

10 $\sin^3\theta = \frac{1}{-8i}\left[e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}\cdot e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}\right]$

$\sin^3\theta = \frac{-1}{8i}\left[(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right]$

10 $\sin^3\theta = \frac{-1}{8i}\left[(2i\sin3\theta) - 3(2i\sin\theta)\right]$

$\sin^3\theta = \frac{-1}{4}\sin3\theta + \frac{3}{4}\sin\theta$

ومنه

10 $\int \sin^3 x\,dx = \frac{1}{12}\cos3\theta - \frac{3}{4}\cos x + c$

50 المجموع

ثانياً:

التمرين الأول: حساب الحجم

10 $V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$

10 $f^2(x) = (x-\sqrt{x})^2 = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$
$= x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + x$

5
5 $V = \pi\int_1^4 \left(x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + x\right)dx$

5×3 $V = \pi\left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2}\right]_1^4$

5+5 $V = \pi\left[\frac{(4)^3}{3} - \frac{4}{5}(4)^{\frac{5}{2}} + \frac{(4)^2}{2}\right] - \pi\left[\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2}\right]$

5 $V = \frac{111\pi}{30} = \frac{37\pi}{10}$

60 المجموع

التمرين الثاني:

طريقة أولى:

5 $\vec{AB} = (1,-1,-1)$

5 $\vec{AC} = (-1,1,0)$

5 $\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{-1}$ المتجهان ليسا مرتبطين خطياً فالنقط ABC ليست على استقامة واحدة

5 لنوجد الناظم $\vec{n}_1$ بحيث $\vec{n}_1 = \vec{AB}\wedge\vec{AC}$

10+10 $\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j}$

فتكون معادلة المستوي ABC المار من A

والمتجه الناظم له $\vec{n}_1$ هي:

10 $1(x+1)+1(y-2)=0$

$x+y-1=0$

لنرى هل $D(-1,2,3)$ تقع على هذا المستوي

5 نعوض

$-1+2-1=0$ محققة

5 ومنه النقط A , B , C , D تقع في مستوٍ واحد

60

طريقة ثانية:

30 ① لنوجد المتجه الناظم $\vec{n}_1$: $\vec{n}_1 = \vec{AB}\wedge\vec{AC}$

وهو كما وجدناه سابقاً $\vec{n}_1 = \vec{i} + \vec{j}$

② لنوجد المتجه الناظم $\vec{n}_2$: $\vec{n}_2 = \vec{DC}\wedge\vec{DB}$

5 لدينا $\vec{DC} = (-1,1,-1)$

5 $\vec{DB} = (1,-1,-2)$

$\frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{-1}$ المتجهان ليسا مرتبطين خطياً

5 فالنقط B , D , C ليست على استقامة واحدة

5 $\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$

5 بالمقارنة مع $\vec{n}_1$ نجد $\vec{n}_2 = -3\vec{n}_1$ إذاً $\vec{n}_2 , \vec{n}_1$ مرتبطان خطياً فالنقط A , B , C , D

5 تقع في مستوٍ واحد

60

التمرين الثالث: المصفوفة المدرّجة

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix}$

4×3 نجري التحويلات

$R_2 - 5R_1 \to R_2$
$R_3 - R_1 \to R_3$
$R_4 - 3R_1 \to R_4$

4×4 $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -6 & -12 & -18 & -24\\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8\end{bmatrix}$ $\quad \frac{-1}{6}R_2 \to R_2$

4×2 نجري التحويلين

$R_3 + R_2 \to R_3$
$R_4 + 2R_2 \to R_4$

$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8\end{bmatrix}$

4 $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

40 المجموع

سلم المذاكرة الثانية – مادة الرياضيات
الثالث الثانوي العلمي نموذج (ب)

ثالثاً : ① المقارب المائل :

10 $f(x) - y_\Delta = \dfrac{x^3+1}{x^2+2x} - (x-2) = \dfrac{1+4x}{x^2+2x}$

5+5 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta] = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y_\Delta] = 0$

5 ومنه $\Delta : y = x-2$ مقارب مائل للخط C عند $+\infty$ وعند $-\infty$

لدراسة الوضع النسبي : لدينا

5 $1+4x = 0 \quad x = -\frac{1}{4}$

5 $x^2+2x = 0$ إما $x = 0$ أو $x = -2$

x	$-\infty$ — -2	-2 — $-\frac{1}{4}$ — 0		0 — $+\infty$
5 $1+4x$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
5 x^2+2x	$+$	$-$	$-$	$+$
5 $f(x)-y_\Delta$	$-$	$+$	$-$	$+$
10 الوضع النسبي	C تحت المقارب	C فوق المقارب	C تحت المقارب	C فوق المقارب

$\left(-\frac{1}{4}, -\frac{9}{4}\right)$ نقطة مشتركة مع المقارب

60 المجموع

② سؤال الأعداد المركبة

أولاً : نحول $Z = -8\sqrt{3} - 8i$ إلى الصيغة الأسية

5 $r = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + (-8)^2} = \sqrt{256} = 16$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ربع ثالث

5 $\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-8}{16} = \frac{-1}{2}$; $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

5 $Z = 16\, e^{i\frac{7\pi}{6}}$

5 ثانياً : نفرض $w = r\, e^{i\theta}$ أحد الجذور فيكون

$w^4 = Z$

(يمكن دمج الخطوتين) $(r\, e^{i\theta})^4 = 8\sqrt{3} - 8$

5 $r^4 e^{i4\theta} = 16\, e^{i\frac{7\pi}{6}}$

5 $r^4 = 16 \Rightarrow \boxed{r = 2}$

5 $4\theta = \frac{7\pi}{6} + 2\pi K \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi K}{2}$

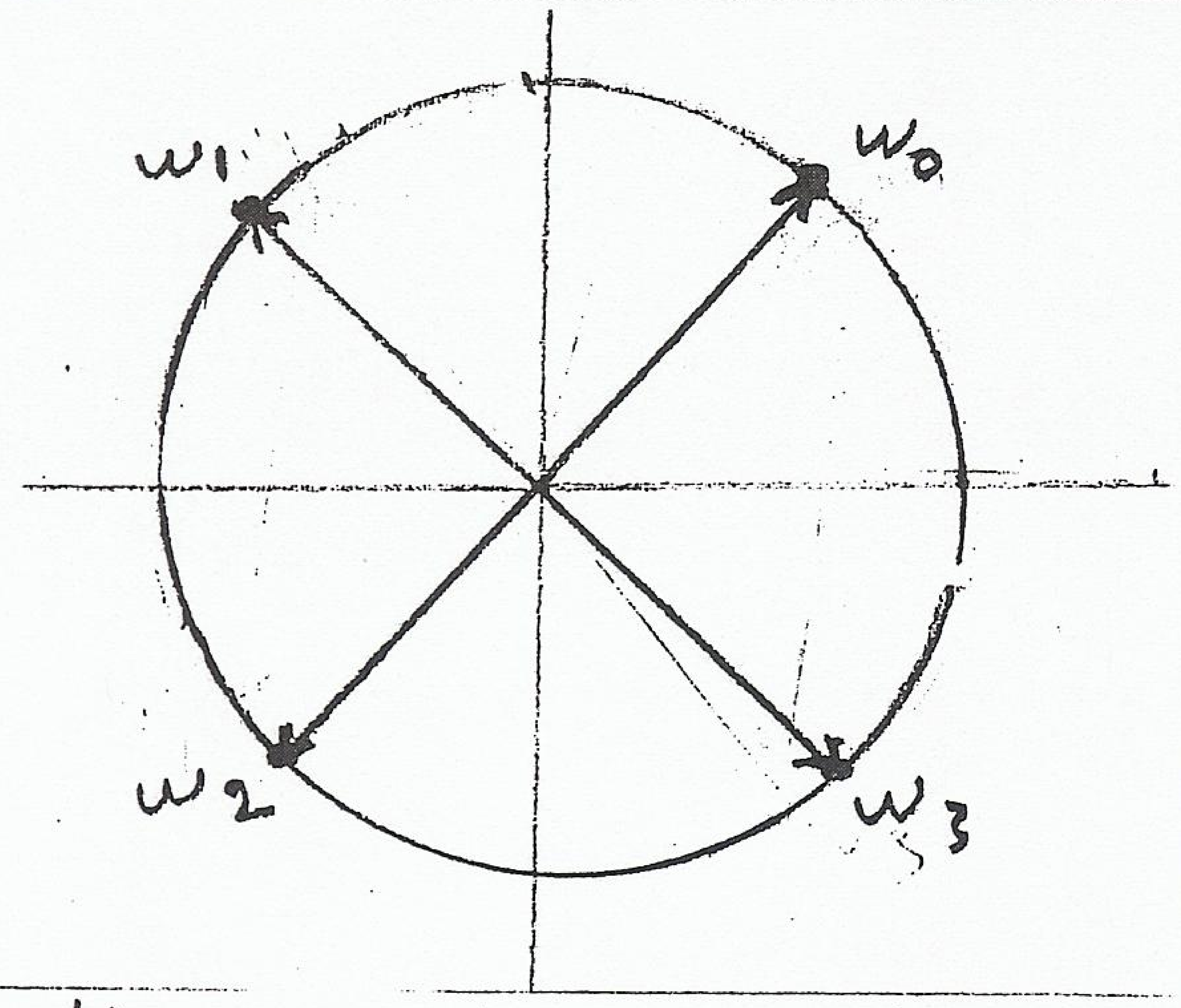
5 $K=0 \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{24} \Rightarrow w_1 = 2\, e^{i\frac{7\pi}{24}}$

5 $K=1 \Rightarrow \theta = \frac{19\pi}{24} \Rightarrow w_2 = 2\, e^{i\frac{19\pi}{24}}$

5 $K=2 \Rightarrow \theta = \frac{31\pi}{24} \Rightarrow w_3 = 2\, e^{i\frac{31\pi}{24}}$

5 $K=3 \Rightarrow \theta = \frac{43\pi}{24} \Rightarrow w_4 = 2\, e^{i\frac{43\pi}{24}}$

5



60 المجموع

③ طول القوس

10 $L = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$

10 $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$

$f'^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^2$

5+5 $f'^2(x) = \frac{1}{4}e^{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-x}$

5 $1+f'^2(x) = \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-x}$

5 $1+f'^2(x) = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right)^2$

$\sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} > 0$

5 $L = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\right) dx$

10 $L = \left[e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^1$

$L = \left[\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right] - [1-1]$

5 $L = \dfrac{e-1}{\sqrt{e}}$

60 المجموع

④ سؤال القطوع

$3x - 2y - 7 = 0$
$3x + 2y + 1 = 0$

5 بالجمع $6x - 6 = 0 \qquad x = 1$

5 بالطرح $-4y - 8 = 0 \qquad y = -2$

5 ومنه $O'(1, -2)$ مركز القطع

سلم المذاكرة الثانية – مادة الرياضيات

الثالث الثانوي العلمي نموذج (ب)

تتمة سؤال القطوع :

$O'(1\,,\,-2)$ ، $F(1+\sqrt{13}\,,\,-2)$ بالمقارنة

5 نستنتج أن المحور المحرقي يوازي ox

5 وأن $c=\sqrt{13}$

من معادلة المقارب $3x-2y-7=0$

10 نجد ميل المقارب $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$

5 $b=\frac{3a}{2}$ $\quad b^2=\frac{9a^2}{4}$

10 $c^2=a^2+b^2$

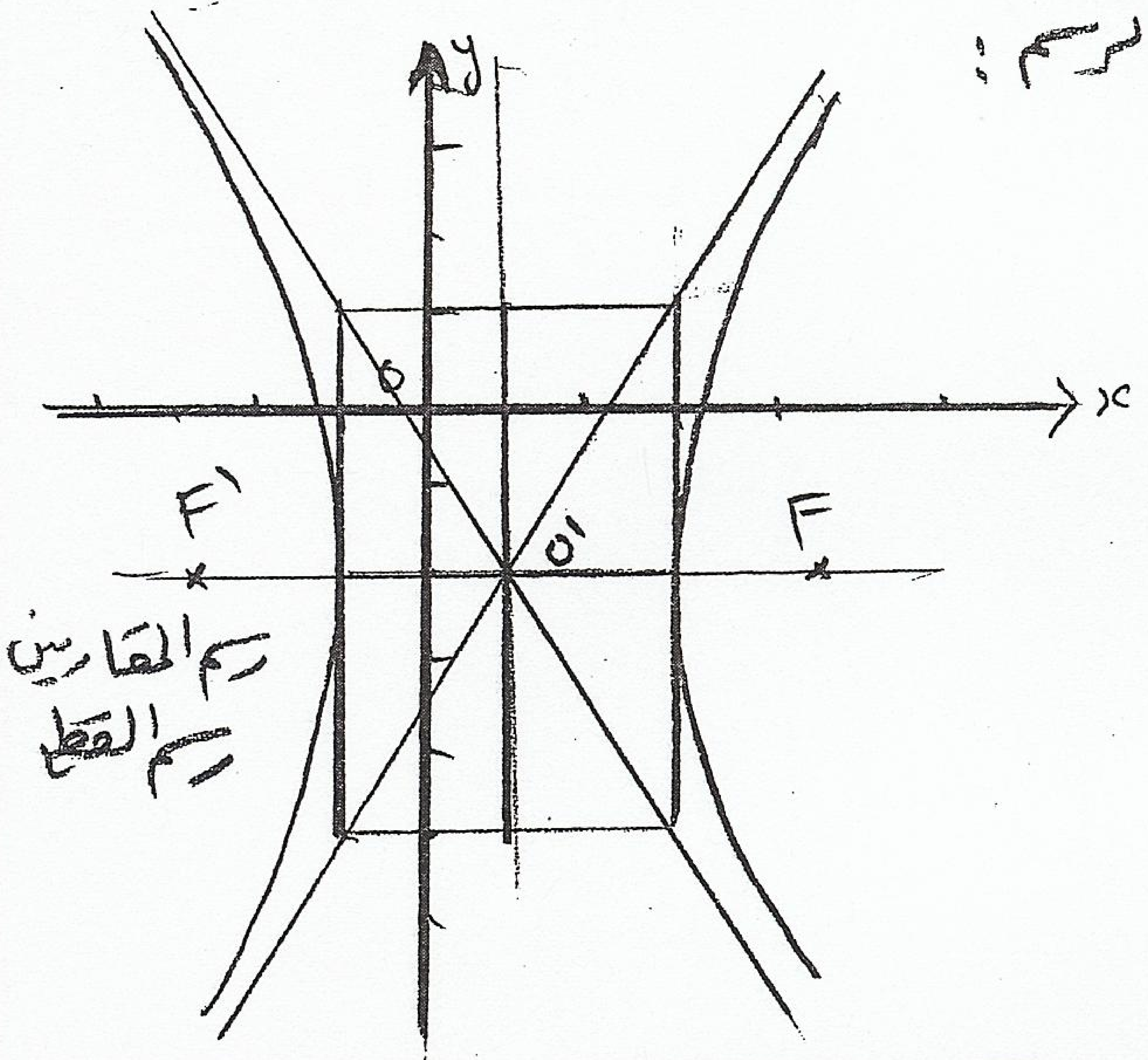
5+5 $13=a^2+\frac{9a^2}{4}=\frac{13a^2}{4}\Rightarrow a=2$

5 $\Rightarrow b=3$

ومنه معادلة القطع الزائد

10 $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$

الرسم :



10 رسم المقاربين

5 رسم القطع

90 المجموع

رابعاً: مسألة التحليل

5 الدالة f معرفة على $R\setminus\{0,4\}$

مستمرة واشتقاقية على كل من المجالات

5 $]-\infty,0[\ ,\ ]0,4[\ ,\ ]4,+\infty[$

5×3 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=0$ ؛ $y=0$ مستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$

5 $\lim\limits_{x\underset{<}{\to}0}[f(x)]=+\infty$

5+5 $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}0}[f(x)]=-\infty$ ؛ $x=0$ مستقيم مقارب هو المحور oy

فرع C على يمين المقارب عند $-\infty$ والآخر على يسار المقارب عند $-\infty$

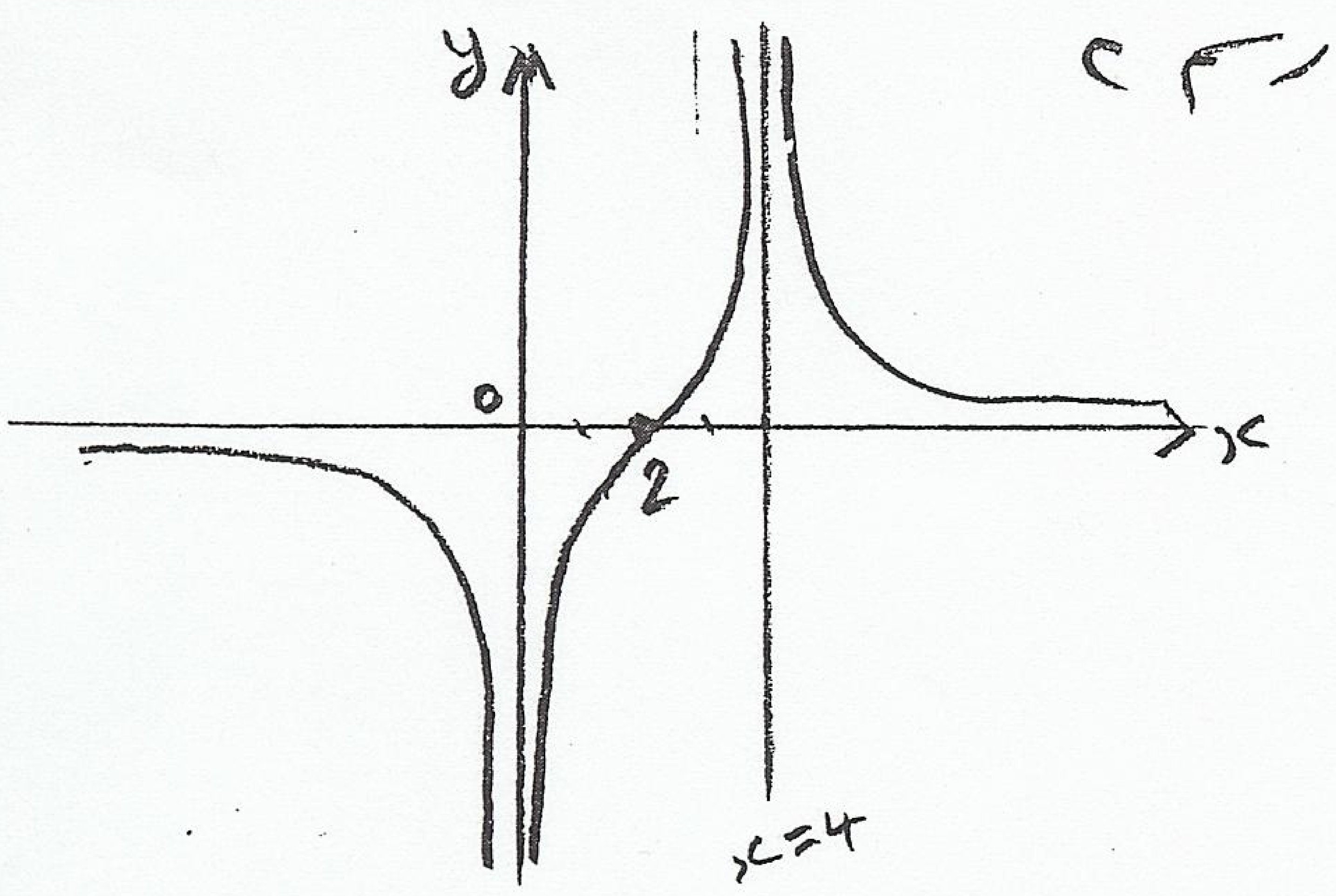
5×3 $\lim\limits_{x\underset{>}{\to}4}[f(x)]=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\underset{<}{\to}4}[f(x)]=+\infty$ ؛ $x=4$ مستقيم مقارب يوازي المحور oy

فرع C على يمين المقارب عند $+\infty$ والآخر على يسار المقارب عند $+\infty$

15 $f'(x)=\dfrac{\left[\left(\frac{x}{x-4}\right)^2\right]'}{\left(\frac{x}{x-4}\right)^2}=\dfrac{-8}{x(x-4)}$

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$ (10)		$-$	‖	$+$	‖	$-$	
$f(x)$ (10)	0	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0

رسم C

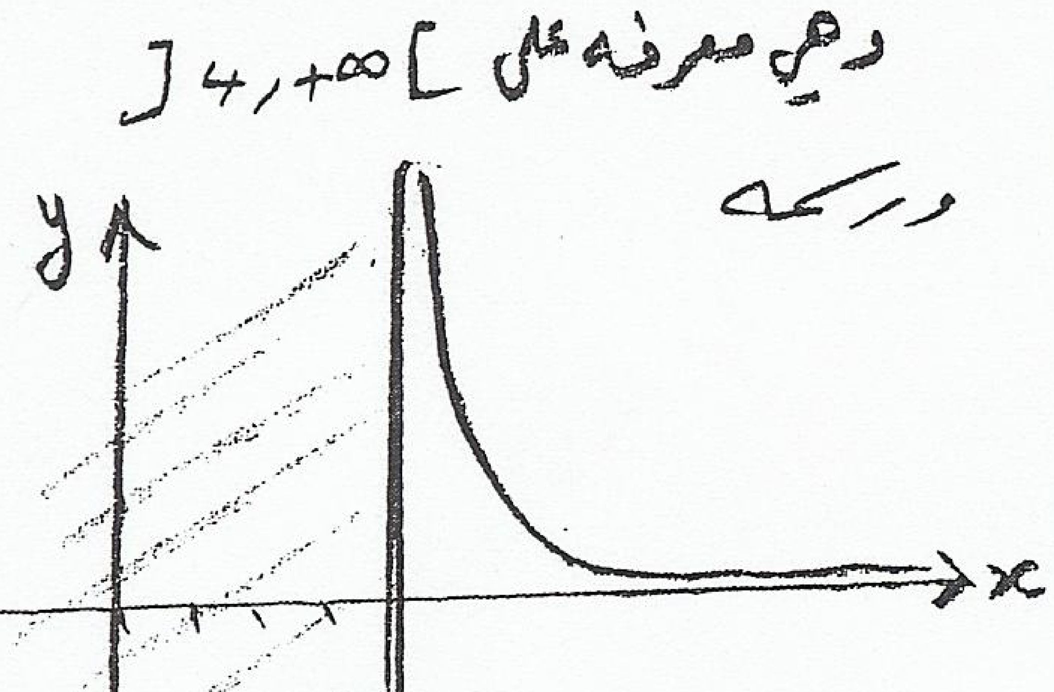


5×3

5 $f(x)=0\Rightarrow\frac{x}{x-4}=1$ أو $\frac{x}{x-4}=-1\Rightarrow x=2$ $\quad(2,0)$ نقطة مساعدة للرسم

10 لرسم C_1 للدالة $f_1(x)=2[\ln x-\ln(x-4)]$ وهي معرفة على $]4,+\infty[$

ورسمه



5

120 المجموع