أولاً : (60 د، ص)

لتكن الدالة $f(x)=\ln(x+1)$ معرفة واشتقاقية على $]-1,+\infty[$ ، $f(0)=0$ ، $f'(0)=1$ ، $f'(x)=\frac{1}{x+1}$ 5+5

حساب النهاية $\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=f'(0)$ 15

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=1$ 10

$\frac{\ln(1-2x)}{x}=-2\frac{\ln(-2x+1)}{-2x}$ 10

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1-2x)}{x}\right]=-2(1)=-2$ 5+5

60

ثانياً :

التمرين الأول (20 د، ص)

$\overrightarrow{BA}(-1,-2,2)$ $\overrightarrow{BC}(-2,-3,a+3)$ 5+5

$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$ 5

$(-1)(-2)+(-2)(-3)+(+2)(a+3)=0$ 5

$+2+6+2a+6=0$

$2a=-14$ $a=-7$

وفي الحالة $a=-7$ نحسب $\cos A$

$\overrightarrow{AB}(1,2,-2)$ $\overrightarrow{AC}(-1,-1,-6)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{9}=3$ $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{38}$ 5+5

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=(1)(-1)+(2)(-1)+(-2)(-6)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-2-2+12=8$ 5

$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}=\frac{8}{3\cdot\sqrt{38}}$ 5+5

50

التمرين الثاني : (20 د، ص)

نقطة التقاطع مع (oy) تقضي $x=0$ 5

$3(0)+y+1=0$ ومنه $y=-1$ 5

نقطة التقاطع (0، -1) ومنه

$f(0)=-1\Rightarrow -1=\frac{b}{1}\Rightarrow b=1$ 5+5

$f'(x)=\frac{-a-b}{(x-1)^2}$ ومن أجل $(m=-3$ عند $x=0)$ 15

ومنه $-3=\frac{-b-a}{(0-1)^2}$ 5+5

$-3=\frac{-1-a}{1}\Rightarrow \boxed{a=2}$ 5

50

التمرين الثالث (20 د، ص)

$\frac{e^x-e^{3x}}{\sin 2x}=\frac{-e^x(e^{2x}-1)}{\sin 2x}$ 5+5

$=-e^x\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}$ 10

ومنه $\lim_{x\to 0}\left[\frac{e^x-e^{3x}}{\sin 2x}\right]=-e^0(1)(1)=-1$ 5×4

40

ثالثاً :

السؤال الأول : (30 د، ص)

نكتب : $\frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x-2}$ 5×3

نضرب الطرفين بـ $x-2$ وننهي x الى (2) $\frac{9}{9}=C\Rightarrow C=1$ 5+5

نضرب الطرفين بـ $(x+1)^2$ وننهي x الى -1 $\frac{-4+1}{-1-2}=B\Rightarrow B=1$ 5+5

يتبع لدينا :

50

$\frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2}$　5

نفرض $x=0$ نجد　5

$\frac{1}{-2} = A + 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow A = -1$

أو بطريقة أخرى.

$$\frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-2}$$

على $]2,+\infty[$ نجد

$\int f(x)\,dx = -\ln(x+1) - \frac{1}{x+2} + \ln(x-2)$　5×3

$\int f(x)\,dx = \ln\frac{x-2}{x+1} - \frac{1}{x+2} + C$　60

السؤال الثاني : 70

نفرض $w = x+1+iy$ أحد الجذرين　3

فيكون $w^2 = Z$　3

$(x+1+iy)^2 = 1 - 4\sqrt{5}i$　3

$x^2 - y^2 + 2xyi = 1 - 4\sqrt{5}i$　3

① $x^2 - y^2 = 1$　② $x^2 + y^2 = 9$　③ $2xy = -4\sqrt{5}$　3+3

$|Z| = \sqrt{1+80} = \sqrt{81}$　3

بجمع ① و ② نجد　3

$2x^2 = 10$　$x^2 = 5$　بتعويض ② في ①　3

$x = \pm\sqrt{5}$

بطرح ① من ②　$2y^2 = 8$　$y^2 = 4$　3

$y = \pm 2$　3

من ③ نجد x و y من إشارتين مختلفتين　3

الجذران　$w_1 = \sqrt{5} - 2i$　3

$w_2 = -\sqrt{5} + 2i$　3

45

إلى المعادلة بأشكال حقيقية

وأحد الجذرين عدد مركب Z

فالجذر الآخر مرافقه　5

إذا جذر المعادلة　$Z_1 = 1 - 4\sqrt{5}i$

$Z_2 = \overline{Z_1} = 1 + 4\sqrt{5}i$　5

مجموعها　$Z_1 + Z_2 = 2$　3

جداؤهما　$Z_1 \cdot Z_2 = (1-4\sqrt{5}i)(1+4\sqrt{5}i)$　6

$= 1 - 80i^2 = 81$

فالمعادلة من الشكل　$Z^2 - 2Z + 81 = 0$

وبالمطابقة مع　$Z^2 + bZ + c = 0$

نجد :　$b = -2$ ، $c = 81$　(25)　3+3

30

السؤال الثالث : (100 نقطة)

البؤرتان فرضاً　$(-2,1)$　$(6,1)$

ومنه مركز القطع　$(2,1)$　5

$a = 4$　$2a = 8$

البعد بينهما　$2a = 8 \Leftarrow a = 4$　5

فيكون القطر الصغير فرضاً　$2b = 4 \Leftarrow b = 2$　5

المعادلة من الشكل

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$　5

$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$　5

$c^2 = 16 - 4 = 12$　$c = 2\sqrt{3}$　5

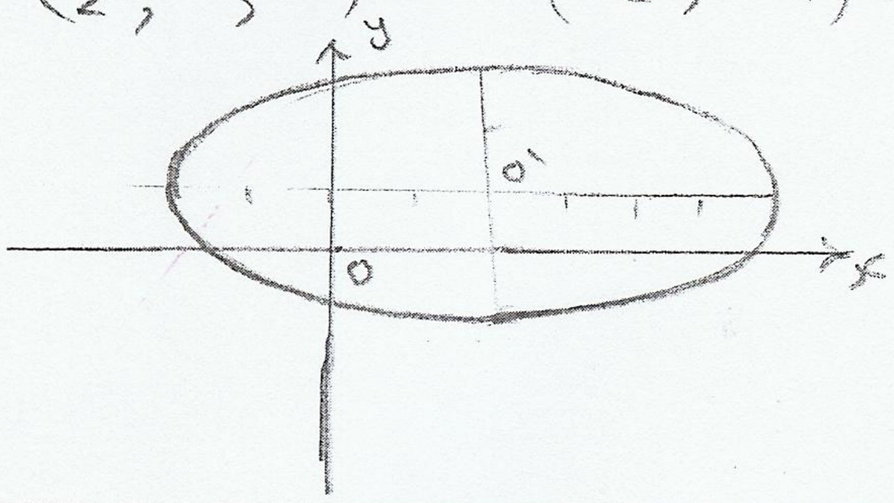
$F(x_0+c, y_0)$　$F'(x_0-c, y_0)$

$F(2+2\sqrt{3}, 1)$　$F'(2-2\sqrt{3}, 1)$　5+5

البؤرتان الأخريتان

(x_0, y_0+b)　(x_0, y_0-b)　5+5

$(2, 3)$　$(2, -1)$



10

60

نتمة السؤال الثالث :

لنتحقق أن $M(2+2\sqrt{3}, 0) \in E$

$(2+2\sqrt{3}-2)^2 + 4(0-1)^2 \overset{?}{=} 16$ 5

محققة $12 + 4 = 16$

نشتق علاقة القطع بالنسبة لـ x

$2(x-2) + 8(y_x - 1) y'_x = 0$ 20

نفرض $y_x = 0$ $\quad x = 2+2\sqrt{3}$

$y'_x = m$ فنجد : 5

$2(2\sqrt{3}) + 8(-1)m = 0$

$-8m = -4\sqrt{3} \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 5

معادلة المماس $y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 2 - 2\sqrt{3})$ 5

40

100

السؤال الرابع : (80 درجة)

$X(\Omega) = \{10, 5, 2, a\}$ 6

$f(10) = P\{(H,H,H)\} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ 3×4

$f(5) = P\{(H,H,T)\}\cdot 3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{12}{27}$ 3×5

$f(2) = P\{(HTT)\}\cdot 3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{6}{27}$ 3×5

$f(a) = P\{(TTT)\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ 3×4

$E(X) = \sum_{K=1}^{4} r_K \cdot f(r_K)$ 5

$E(X) = (10\cdot\frac{8}{27}) + (5\cdot\frac{12}{27}) + (2\cdot\frac{6}{27}) + (a\cdot\frac{1}{27})$ 5

$E(X) = \frac{152 + a}{27}$

نفرض $\frac{16}{3} = \frac{152+a}{27} \Rightarrow \boxed{a = -8}$ 5+5

90

رابعاً : مسألة التحليل (90 درجة)

① الفرض : $\frac{dy}{dt} = 1 \text{ cm.s}^{-1}$

الحجم المفروض عندما $x_M = \frac{3}{4}$ 5

المطلوب : $\frac{dx}{dt}$?

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$ 5

$f(x) = \sqrt{3-x} + \frac{-x}{2\sqrt{3-x}} = \frac{2(3-x)-x}{2\sqrt{3-x}}$ 10

$\frac{dy}{dt} = \frac{6-3x}{2\sqrt{3-x}}\cdot\frac{dx}{dt}$

$1 = \frac{6-3(\frac{3}{4})}{2\sqrt{3-\frac{3}{4}}}\cdot\frac{dx}{dt}$ 5

$\frac{dx}{dt} = \frac{2\times\frac{3}{2}}{\frac{15}{4}} = \frac{4}{5}$ cm.s^{-1} 5

30

② $\int f(x)\,dx = \int x\sqrt{3-x}\,dx$

نكامل بالتجزئة

$u(x) = x \quad u'(x) = 1$ 4

$v'(x) = \sqrt{3-x} \quad v(x) = \frac{(3-x)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}}$ 4

$v'(x) = (3-x)^{\frac{1}{2}}$

$v(x) = \frac{-2}{3}\sqrt{(3-x)^3}$ 8

الدستور :

$\int f(x)\,dx = \left[\frac{-2x}{3}\sqrt{(3-x)^3}\right] - \int -\frac{2}{3}(3-x)^{\frac{3}{2}}\,dx$ 4

$= \left[\frac{-2x}{3}\sqrt{(3-x)^3}\right] + \frac{2}{3}\,\frac{(3-x)^{\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}} + C$ 4

$\int f(x)\,dx = -\frac{2x}{3}\sqrt{(3-x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(3-x)^5} + C$ 4

معادلة المقتنيات التكاملية

$F(x) = \frac{-2x}{3}\sqrt{(3-x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(3-x)^5} + C$ 4

$F(2) = \frac{2}{5}$ فرضاً

$\frac{2}{5} = \frac{-4}{3}\sqrt{(1)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(1)^5} + C \Rightarrow C = 2$ 4

ومنه معادلة المقتنى التكاملي المطلوب :

$F(x) = \frac{-2x}{3}\sqrt{(3-x)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(3-x)^5} + 2$ 4

40

③ $f(x) = x\sqrt{3-x}$

$f_1(x) = e^{2x} - e^x$

الشرط الأول

$f_1(0) = 1 - 1 = 0$ 2+2

$f(0) = 0$ محقق

$f'_1(x) = 2e^{2x} - e^x \Rightarrow f'_1(0) = 1$ 3+3

$f'(x) = \sqrt{3-x} + \frac{-x}{2\sqrt{3-x}}$ 3

$f'(0) = \sqrt{3} + 0$ 3

ومنه $f'(0) \neq f'_1(0)$ 2

الشرط الثاني غير محقق 2

ومنه C_1, C ليسا متماسين 2

20

90 المجموع