أولاً: (60 درجة)

5 بفرض الدالة $f(x)=e^x$ الاشتقاقية على R

5+5 $f'(x)=e^x \qquad f'(0)=1$

15 حسب التعريف $\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right]=f'(0)$

5 ومنه $\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$

10 $\frac{1-e^{2x-2}}{x-1}=-2\,\frac{e^{2(x-1)}-1}{2(x-1)}$

10+5 $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1-e^{2x-2}}{x-1}\right]=-2(1)=-2$

60

ثانياً:

التمرين الأول: (50 درجة)

5 شرط التعامد $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$

5 $(-1)(a+1)+(a+3)(-1)+2(3)=0$

5 $-2a+2=0 \qquad a=1$

10 $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ -1 & 4 & 2\end{vmatrix}=-14\vec{i}-7\vec{j}+7\vec{k}$

$\vec{u}(2,-1,3) \qquad \vec{v}(-1,4,2)$

5 $|\vec{u}\wedge\vec{v}|=\sqrt{(-14)^2+(-7)^2+(7)^2}=7\sqrt{6}$

5 $|\vec{u}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$

5 $|\vec{v}|=\sqrt{1+16+4}=\sqrt{21}$

10 $\sin(\vec{u},\vec{v})=\frac{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{7\sqrt{6}}{\sqrt{14}\,\sqrt{21}}$

$\sin(\vec{u},\vec{v})=1$

50

التمرين الثاني: (50 درجة)

5 الدالة f كثيرة حدود تكون اشتقاقية على R إذا كانت اشتقاقية عند $x=1$ ويلزم تحقق شرطين

15 الأول: شرط الاستمرار عند (1) $\lim_{x\to 1^>}[f(x)]=\lim_{x\to 1^<}[f(x)]=f(1)$

5 $A-1+B=2A-B \Rightarrow 2B-A=1$

15 الثاني: من أجل $x=1$ يكون $2Ax-1=4Ax$

5 ومنه $2A-1=4A$

$\therefore A=\frac{-1}{2} \qquad 2B+\frac{1}{2}=1$

5 ومنه $B=\frac{1}{4}$

50

التمرين الثالث (50 درجة)

10 $\frac{3x^2+x\sin x}{\tan^2 x-5x^2}=\frac{3+\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan^2 x}{x^2}-5}$

10 ومنه

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{3x^2+x\sin x}{\tan^2 x-5x^2}\right]$

10×3 $=\frac{3+1}{1-5}=-1$

50

ثالثاً: (70 درجة)

السؤال الأول:

5 $f(x)=\frac{x^2+1}{x^3+x^2}=\frac{x^2+1}{x^2(x+1)}$

5 $f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$

5×2 نضرب بـ $(x+1)$ وننتهي x الى (-1): $C=\frac{(-1)^2+1}{(-1)^2}=2$

5×2 نضرب بـ x^2 وننتهي x الى الصفر: $B=\frac{0+1}{0+1}=1$

5 بجمع لدينا $\frac{x^2+1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x+1}$

نفرض $x=1$

5+5 $\frac{2}{(1)^2(2)}=A+1+1$ ومنه $A=-1$

ومنه

5 $\int f(x)\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x+1}\right)dx$

5×4 $=-\ln(-x)-\frac{1}{x}+2\ln(-x-1)+c$

$=\frac{-1}{x}+\ln\left[\frac{(x+1)^2}{-x}\right]+c$

70

السـؤال الرابع: (70 درجة)

دستور التقريب

10 $f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\cdot h$

5 $f(x)=\ln\frac{1}{x}$ $\quad f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{-1}{x}$

$a=1 \quad f(a)=0 \quad f'(a)=-1$

$h=0.2$

$f(1+0.2) \simeq 0 + (-1)(0.2)$

3 $f(1,2)\simeq -0.2$

30

حل $\int \ln\frac{1}{x}\,dx \; ; \;]0,+\infty[$

تكامل بالتجزئة

3+3 نفرض $u(x)=\ln\frac{1}{x} \quad u'(x)=\frac{-1}{x}$

3+3 $v'(x)=1 \quad v(x)=x$

10 $\int f(x)\,dx = [u(x)v(x)] - \int v_x\, u'_x\, dx$

$= [x\ln\frac{1}{x}] - \int(\frac{-1}{x})\,x\,dx$

3 $= [x\ln\frac{1}{x}] + \int dx$

3 $= x\ln\frac{1}{x} + x + C$

معادلة المنحنيات التكاملية:

3 $F(x) = x\ln\frac{1}{x} + x + C$

3 $F(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln e + \frac{1}{e} + C$

3 $0 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + C \Rightarrow C = \frac{-2}{e}$

3 والمطلوب $F(x) = x\ln(\frac{1}{x}) + x - \frac{2}{e}$

40 ملاحظة: يمكن أن تكتب $u(x) = -\ln x$ وتتابع كما ورد أعلاه

70 المجموع

رابعاً: (90 درجة)

① A حدث الكرة المسحوبة الثالثة سوداء

$P(A)=P[(ححس) \text{ أو } (سسس) \text{ أو } (حسس) \text{ أو } (سحس)]$

4×6 $P(A)=(\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5})+(\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5})+(\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5})+(\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5})$

6 $P(A)=\frac{36+6+24+24}{210}=\frac{90}{210}$

30

---

② بفرض a ما يناله عند سحب كرة حمراء

4 فيكون $2a$ = = = = سوداء

حالات المسألة بعد سحب 3 كرات

سسس $\to 6a$ حسس $\to 5a$ ححس $\to 4a$ ححح $\to 3a$

4×4 $X(\Omega)=\{3a, 4a, 5a, 6a\}$ 3×4

4 $f(3a)=P\{ححح\}=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{24}{210}$

4+4 $f(4a)=P\{(سحح)\}\cdot 3=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot 3=\frac{108}{210}$

4+4 $f(5a)=P\{(س،س،ح)\}\cdot 3=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot 3=\frac{72}{210}$

4 $f(6a)=P\{(س،س،س)\}=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{210}$

4 $E(X)=\sum_{k=1}^{4} r_k\cdot f(r_k)$ دستور التوقع الرياضي

4 $E(X)=(3a\cdot\frac{24}{210})+(4a\cdot\frac{108}{210})+(5a\cdot\frac{72}{210})+(6a\cdot\frac{6}{210})$

فرضاً

$30=\frac{72a+432a+360a+36a}{210}$

4 $30=\frac{900a}{210} \Rightarrow a=7$

ينال عند سحب كرة حمراء 7 نقاط

4 = = = = سوداء 14 نقطة

60

حل آخر بالتوافيق:

$f(3a)=\frac{C(4,3)}{C(7,3)}=\frac{4}{35}$

$f(4a)=\frac{C(3,1)\,C(4,2)}{C(7,3)}=\frac{18}{35}$

$f(5a)=\frac{C(3,2)\,C(4,1)}{C(7,3)}=\frac{12}{35}$

$f(6a)=\frac{C(3,3)}{C(7,3)}=\frac{1}{35}$

90 المجموع

السؤال الثاني : 60 درجة

نفرض $w = x+iy$

فيكون $w^2 = Z$ — 3

$(x+iy)^2 = -3-4i$ — 3

$x^2-y^2+2xyi = -3-4i$ — 3

① $x^2-y^2=-3$ $\quad 2xy=-4$ — 3+3

$x^2+y^2=|z|=\sqrt{9+16}=5$ — 3+3

بالجمع $2x^2=2$ $\quad x^2=1$ $\quad x=\pm1$ — 3

بالطرح $-2y^2=-8$ $\quad y^2=4$ $\quad y=\pm2$ — 3

من ① x و y من إشارتين مختلفتين — 3

إما $w=1-2i$ — 3

أو $w=-1+2i$ — 3

حل المعادلة $Z^2-2(1-4i)Z-12-4i=0$

$Z^2-2(1-4i)Z+(1-4i)^2-(1-4i)^2-12-4i=0$ — 3

$[Z-(1-4i)]^2-(-8i+1-16)-12-4i=0$ — 3

$[Z-1+4i]^2+3+4i=0$ — 3

$[Z-1+4i]^2-(-3-4i)=0$ — 3

$[Z-1+4i]^2-w^2=0$

$[Z-1+4i]^2-(1-2i)^2=0$ — 3

$[Z-1+4i+(1-2i)][Z-1+4i-(1-2i)]=0$ — 3

$(Z+2i)(Z-2+6i)=0$

إما $Z=-2i$ — 3

أو $Z=2-6i$ — 3

60

السؤال الثالث: 100 درجة

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$

$a^2=4$ $\quad b^2=1$ $\quad c^2=a^2-b^2$ — 3×3

$a=2$ $\quad b=1$ $\quad c^2=3$ $\quad c=\sqrt{3}$ — 3×3

مركز القطع $(0,0)$ المحور المحرقي OX — 3+3

$F(c,0)=(\sqrt{3},0)$ — 3

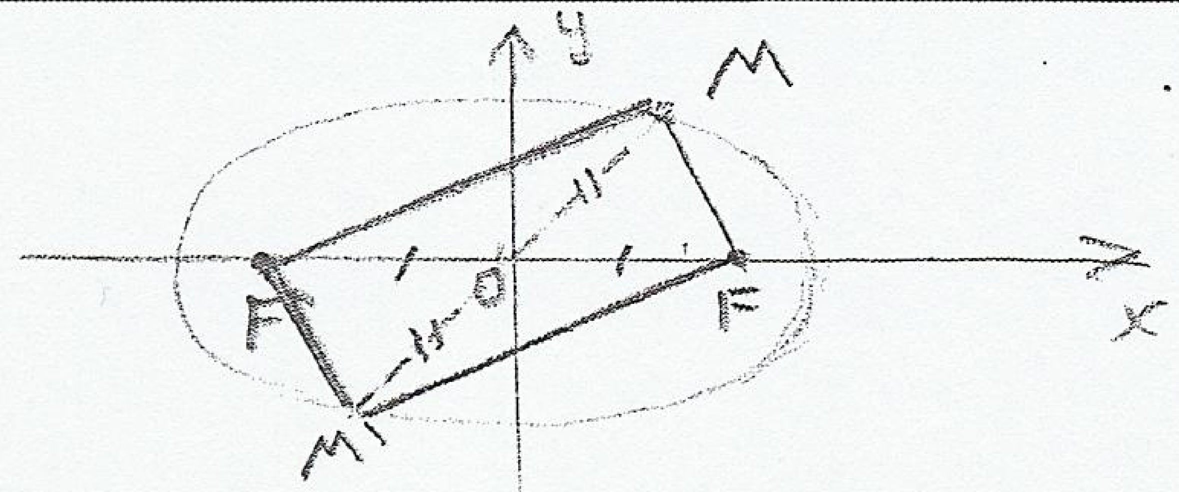
$F'(-c,0)=(-\sqrt{3},0)$ — 3

ذروتا القطر الكبير

$(a,0)=(2,0)$ $\quad (-a,0)=(-2,0)$ — 3+3

ذروتا القطر الصغير

$(0,b)=(0,1)$ $\quad (0,-b)=(0,-1)$ — 3+3



4/40

يكون المستقيم $d: x+2\sqrt{3}y=4$

5 مماساً للقطع E إذا كان يشترك مع القطع الناقص بنقطة وحيدة وهذا يتطلب أن يكون

5 لحل جملة معادلتيهما جذراً مضاعفاً

5 من معادلة المماس نجد $y=\frac{x-4}{2\sqrt{3}}$

نعوض في معادلة القطع

$x^2+4\frac{(x-4)^2}{12}=4$

$3x^2+(x-4)^2=12$

5 $4x^2-8x+4=0$

$4(x^2-2x+1)=0$

5 $4(x-1)^2=0$

ومنه $x=1$ جذر مضاعف

فالمستقيم d مماس للقطع الناقص

نعوض عند $x=1$

$1+2\sqrt{3}y=4$ $\quad y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 ومنه نقطة التماس $M(1,\frac{\sqrt{3}}{2})$

5 مركز القطع $(0,0)$ ومنه $M'(-1,\frac{-\sqrt{3}}{2})$

5 M, M' متناظرتان بالنسبة للمركز $(0,0)$

F, F' = = = =

5 فالرباعي $FMF'M'$ متوازي أضلاع لأن أقطاره متناصفة

ولحساب محيطه P نكتب

5 $P=\underbrace{MF+MF'}+\underbrace{M'F+M'F'}$

5 $P=2a+2a$ حسب تعريف القطع الناقص

5 $P=4a=4(2)=8$

60

المجموع 100