

أولاً: أجبني عن الأسئلة الأربعة الآتية: (40 درجة لكل سؤال)**السؤال الأول:** f تابع معرف على $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$ خطه البياني C_f ، يحقق كلاً مما يأتي:

- f متناقص تماماً على كل من المجالين $]3, +\infty[$ و $]-\infty, 3[$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-x - 1)) = 0$.
- ① يبني ما للخط C_f من مستقيمات مقارنة يطلب كتابة معادلة كلٍ منها.
- ② نظمي جدولاً بتغيرات f .

السؤال الثاني: لتكن العدد العقدي $u = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

- ① اكتب u بالشكل الأسّي.
- ② اكتب u^3 بالشكل الأسّي ثم بالشكل الجبري.
- ③ تحقق أن $u^4 = -u$ و $u^5 = -u^2$.
- ④ استنتج أن $u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = 0$.

السؤال الثالث: في معلم $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقاط: $B(3, 2, -4)$ و $C(1, -4, 2)$ و $D(5, -2, 4)$ ولتكن النقطة K منتصف القطعة المستقيمة $[CD]$ و J نقطة تحقق $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$

- ① أوجد إحداثيات كلٍ من النقطتين J و K .
- ② ليكن الشعاعان $\vec{u}(1, -2, 2)$ و $\vec{v}(3, -1, -3)$. أثبت أن الأشعة \vec{u} و \vec{v} و \vec{KJ} مرتبطة خطياً.
- السؤال الرابع:** ليكن f و g تابعين معرفين على $]0, +\infty[$ وفق $f(x) = (\ln x)^2$ و $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ ، خطاهما C_f و C_g .

- ① تحقق أنه عند كل $x > 0$ يكون $f(x) - g(x) = \ln x \cdot (\ln x + 1)$.
- ② a حلّي المتراحة $f(x) - g(x) < 0$.
- b استنتج الوضع النسبي للخطين البيانيين C_f و C_g .

ثانياً: حلّ التمارين الأربعة الآتية: (60 درجة لكل سؤال)**التمرين الأول:** ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على \mathbb{R}^* وفق: $f(x) = 1 - \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$

- ① ابحث عن المستقيمات المقاربة الأفقية و الشاقولية للخط C .
- ② أثبت وجود مقارب مائل Δ للخط C يطلب إيجاد معادلته. ثم ادرسي وضع C بالنسبة إلى Δ .

التمرين الثاني: لتكن المعادلة $(E) \quad (1 - i)z^2 - 2\sqrt{3}z + 2 + 2i = 0$

- ① أثبت أن $\Delta = -4$ ثم حلّ المعادلة (E) .
- ② بفرض أن أحد جذري المعادلة (E) هو $z_A = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i}$ اكتب z_A بالشكل الجبري ثم بالشكل المثلثي واستنتج $\sin \frac{5\pi}{12}$.



التمرين الثالث :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} & : x \neq 0 \\ m & : x = 0 \end{cases} \text{ ليكن } f \text{ التابع المعرف على } \mathbb{R} \text{ وفق}$$

① ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على \mathbb{R} ؟

② احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

التمرين الرابع :

① ليكن z عدداً عقدياً ما ، وليكن w عدداً عقدياً طوليته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد .

أثبتني أنّ $\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}$ تخيلي بحت .

② نفترض أنّ $w \neq 1$ وأنّ $\frac{w\bar{z} - z}{iw - i}$ تخيلي بحت أثبتني أنّه إما أنّ يكون z حقيقياً أو أنّ يكون $|w| = 1$.

ثالثاً: حلّي كلّاً من المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى :

لدينا النقاط : $A(5,0,0)$ و $B(2,-1,1)$ و $C(10,1,-2)$ و $D(3,2,1)$.

① هل النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد ؟ عللي إجابتك .

② لتكن النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ و L نقطة تحقق $\overrightarrow{3AL} = \overrightarrow{AD}$ و G مركز ثقل المثلث BCD

أثبتني أنّ المستقيمين (AI) و (GL) متوازيان .

المسألة الثانية :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0, +\infty[$ وفق $f(x) = x + \ln\left(\frac{x}{2x+1}\right)$

① ادرسي تغيّرات f ونظّمي جدولاً بها .

② أثبتني أنّ المستقيم d الذي معادلته $y = x - \ln 2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.

③ ادرسي الوضع النسبي للخط C و مقاربه d .

④ أثبتني أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1, 2[$.

⑤ ارسمي في معلمٍ واحد المستقيم d ثمّ الخط البياني C .

.....انتهت الأسئلة.....