سلم تصحيح مذاكرة الفصل الثاني (D) لمادة الرياضيات شتاء 2019

أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

$f(x)=ax+b+x.e^x$

4 ① $f(0)=2$ ومنه $(0,2)\in C_f$

$a(0)+b+0=2$

4 ومنه $\boxed{b=2}$

المماس يمر بالنقطتين $(0,2)$ و $(2,0)$

ومنه

4 $m_{\text{المماس}}=\frac{2-0}{0-2}=-1=f'(0)$

4 $f'(x)=a+1e^x+e^x.x$

$f'(0)=-1$

4 $a+1=-1$

$\boxed{a=-2}$

② $f(x)=-2x+2+xe^x$

نفرض $D: y=-2x+2$

4 $f(x)-y_D=x.e^x$

4 $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-y_D)=0$

4 ومنه المستقيم D الذي معادلته $y=-2x+2$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

لدراسة وضع C_f بالنسبة إلى D ندرس

إشارة الفرق $f(x)-y_D=x.e^x$

حيث $f(x)-y_D=0$ عندما $x=0$

	x	$-\infty$	0	$+\infty$
4	$f(x)-y_D$	$-$	0	$+$
4	الوضع النسبي	C يقع تحت D	نقطة مشتركة بين C و D $(0,2)$	C يقع فوق D

40

٢٠

السؤال الثاني:

10 عدد المصافحات بين n شخصاً $\binom{n}{2}$

10 $\binom{n}{2}=66$

5 $\frac{n(n-1)}{2}=66$

5 $n^2-n=132$

$n^2-n-132=0$

5 $(n-12).(n+11)=0$

5 إما $n-12=0 \Rightarrow \boxed{n=12}$ مقبول

أو $n+11=0 \Rightarrow n=-11$ مرفوض

40

السؤال الثالث:

$$\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n} \end{cases}$$

① الخاصة المطلوب إثباتها هي:

4 $E(n):\ll u_n=\frac{n}{n+1}\gg$

ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n.

4 (I) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنه محققه $u_0=0=\frac{0}{0+1}=0$

4 (II) لنفترض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة ولنثبت صحة الخاصة $E(n+1)$

4 $E(n+1):\ll u_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}\gg$

4 $L_1=u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}$

4 $=\frac{1}{\frac{2n+2-n}{n+1}}=\frac{n+1}{n+2}=L_2$

4 فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$ فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

② $w_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n$

4 $S_n = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \dots + \ln\frac{n}{n+1}$

4 $S_n = (\ln 1 - \cancel{\ln 2}) + (\cancel{\ln 2} - \cancel{\ln 3}) + \cancel{\dots} + (\cancel{\ln n} - \ln(n+1))$

$S_n = \ln 1 - \ln(n+1)$

4 $\boxed{S_n = -\ln(n+1)}$

40

السؤال الرابع:

① 3 $\vec{n}_P(1, 1, 1)$

3 $\vec{n}_Q(1, 1, -2)$

3 $\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = (1).(1) + (1).(1) + (1).(-2)$

$= 1 + 1 - 2$

$= 0$

3 فالمستويان P و Q متعامدان.

② نفرض A_1 المسقط القائم للنقطة A على المستوي P فيكون

3 $AA_1 = dist(A, P) =$

3 $= \frac{|2 + 1 + 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}}$

3 $\boxed{AA_1 = \frac{5}{\sqrt{3}}}$

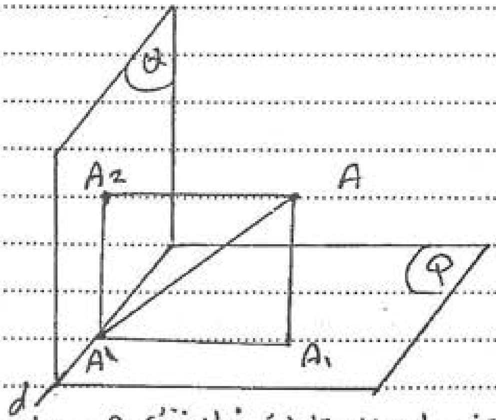
نفرض A_2 المسقط القائم للنقطة A على المستوي Q فيكون

3 $AA_2 = dist(A, Q) =$

$= \frac{|2 + 1 - 4 - 1|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-2)^2}}$

٢٧

3 $\boxed{AA_1 = \frac{2}{\sqrt{6}}}$



نفرض A' المسقط القائم للنقطة A على d فيكون:

$(AA_1) \perp$ المستوي P
$d \perp (A_1A')$
⟸ حسب الأعمدة الثلاث

(I)... $\boxed{d \perp (AA')}$

نفرض A'' المسقط القائم للنقطة A_2 على الفصل المشترك d.

فيكون

$Q \perp (AA_2)$
و $d \perp (A_2A'')$
⟸ حسب مبرهنة الأعمدة الثلاث

(II)... $\boxed{d \perp (AA'')}$

من (I) و (II) نستنتج أن $A' = A''$

ويكون AA' هو بعد A عن d

إن الشكل $A A_1 A' A_2$ مستطيل لأنه شكل رباعي محدب فيه ثلاث زوايا قائمة

$\hat{A_1} = \hat{A} = \hat{A_2} = 90°$

فيكون $[AA']$ هو قطر المستطيل

3 حسب فيثاغورث في المثلث AA_1A' القائم في A_1 نكتب أن

3 $AA'^2 = AA_1^2 + A_1A'^2$

3 $AA'^2 = \frac{25}{3} + \frac{4}{6}$

2 $AA'^2 = \frac{25 + 2}{3} = 9$

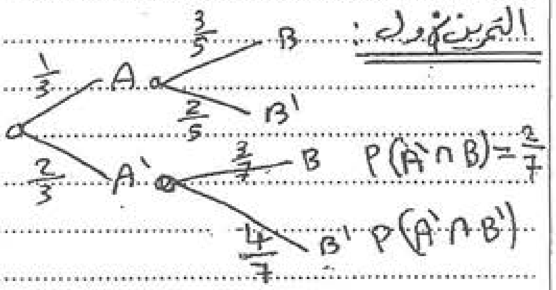
2 $\boxed{AA' = 3}$

40

٢١

ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:



$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) =$
$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

حيث:

$P(B|A) = 1 - P(B'|A)$
$= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(A \cap B') = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$

$P(B|A') = \frac{P(A' \cap B)}{P(A')}$

$= \frac{\frac{2}{7}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{7} \times \frac{3}{2}$

$\boxed{P(B|A') = \frac{3}{7}}$

$P(A' \cap B') = \frac{2}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$

$P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$

$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{7}$

$= \underset{(7)}{\frac{1}{5}} + \underset{(5)}{\frac{2}{7}} = \frac{17}{35}$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

٢٣

$P(A|B) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{17}{35}}$

$= \frac{1}{5} \times \frac{35}{17} = \frac{7}{17}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{17}{35} - \underset{(7)}{\frac{1}{5}}$

$= \frac{1}{3} + \frac{10}{35}$

$= \underset{(7)}{\frac{1}{3}} + \underset{(3)}{\frac{2}{7}}$

$\boxed{P(A \cup B) = \frac{13}{21}}$

التمرين الثاني:

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{2}}{x} \right)$

نفرض

6 $f(x) = \sqrt{e^x + 1}$

6 $f(0) = \sqrt{2}$

6+6 $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x + 1}}$

6 $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

6 وبما ان f اشتقاقية عند 0

ق.ب

+6
6 $f'(0) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right)$

6
+
6 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{2}}{x} \right) = f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

60

سلم تصحيح مذاكرة الفصل الثاني(D) لمادة الرياضيات   شتاء 2019

التمرين الثالث :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \end{cases}$$

① $v_n = u_n + 3$

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+3}{u_n+3}$ 3

$= \frac{\frac{1}{3}u_n - 2 + 3}{u_n+3}$ 3

$= \frac{\frac{1}{3}u_n + 1}{u_n+3}$ 3

$= \frac{\frac{1}{3}\cancel{(u_n+3)}}{\cancel{u_n+3}} = \frac{1}{3} = q$ 3

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ 3

وحدها الأول $v_0 = u_0 + 3$

$v_0 = 2 + 3 = 5$ 3

$v_n = v_0\, q^n$ 3

$\boxed{v_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ 3

$u_n = v_n - 3$

$\boxed{u_n = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3}$ 3

لما $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ 3

ف :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$ 3

② $S_n = \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$

مجموع (n+1) حداً من متتالية

هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها

الأول $v_0 = 5$

$S_n = 5\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$ 3

$S_n = 5\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$ 3

$\boxed{S_n = \frac{15}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)}$ 3

$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

لدينا $u_n = v_n - 3$

ومنه :

$S'_n = (v_0-3) + (v_1-3) + \dots + (v_n-3)$ 3

$S'_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (\underbrace{-3-3-\dots-3}_{\text{(n+1) حداً}})$ 3

$S'_n = S_n + (-3)(n+1)$

$\boxed{S'_n = \frac{15}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) - 3n - 3}$ 3

لما $-1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ 3

ف :

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{15}{2}$ 3

$\lim\limits_{n\to+\infty} S'_n = -\infty$ 3

60

٣٣

٢٢

التمرين الرابع:

6 $\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4$

6 $= \frac{1}{16}\left(\binom{4}{0}(e^{ix})(-e^{-ix})^0 + \binom{4}{1}(e^{ix})^3(-e^{-ix})^1\right.$

6 $+\binom{4}{2}(e^{ix})^2(-e^{-ix})^2 + \binom{4}{3}(e^{ix})^1(-e^{-ix})^3$

6 $\left.+\binom{4}{4}(e^{ix})^0(e^{-ix})^4\right)$

6 $= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$

6 $= \frac{1}{16}\left((e^{4ix} + e^{-4ix}) - 4(e^{2ix} + e^{-2ix})\right)$

6 $= \frac{1}{16}\left(2\cos 4x - 4(2\cos 2x)\right)$

6 $= \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x\right)$

$f(x) = \sin^4 x$

$f(x) = \frac{1}{8}\left(\cos 4x - 4\cos 2x\right)$

6 $F(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4x - 2\sin 2x\right)$

6 $\boxed{F(x) = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x}$

60

ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

① a) $A(1, 2, 3)$

$B(0, 1, 4)$

$C(-1, -3, 2)$

5 $\vec{AB}(-1, -1, 1)$

5 $\vec{AC}(-2, -5, -1)$

٢٤

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما

5 غير متناسبة ($\frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{-5}$)

5 فالنقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة

b) $\vec{n}\cdot\vec{AB} = (2)(-1) + (-1)(-1) + (1)(1)$

5 $= -2 + 1 + 1 = 0$

5 ومنه $\vec{AB} \perp \vec{n}$ ...(1)

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = (2)(-2) + (-1)(-5) + (1)(-1)$

5 $= -4 + 5 - 1 = 0$

5 ومنه $\vec{AC} \perp \vec{n}$ ...(2)

من (1) و (2) نجد أن

5 $\vec{n}(2, -1, 1)$ شعاع ناظمي على المستوي (ABC)

c) $(ABC) \begin{cases} A(1, 2, 3) \\ \vec{n}(2, -1, 1) \end{cases}$

$2(x-1) - 1(y-2) + 1(z-3) = 0$

5 $\boxed{2x - y + z - 3 = 0} : (ABC)$

② $\begin{cases} 4 = 2 - 2t & (1) \\ -2 = -1 + t & (2) \\ 5 = 4 - t & (3) \end{cases}$

(لنتحقق من إحداثيات النقطة D في المعادلات الوسيطية للمستقيم Δ)

5 $\begin{cases} 2t = -2 \Rightarrow t = -1 \\ -1 = t & \text{محققة} \\ t = -1 & \text{محققة} \end{cases}$

5 ومنه فالنقطة D تنتمي إلى المستقيم Δ

وهي موافقة لـ $t = -1$

$\vec{v}_{\Delta}(-2, 1, -1) = -\vec{n}$

5 فالشعاعان $\vec{v}_{\Delta}$ (شعاع توجيه المستقيم Δ)

و $\vec{n}$ مرتبطان خطياً

5 فالمستقيم Δ يعامد المستوي (ABC)

③ إيجاد إحداثيات النقطة E :

المسقط القائم للنقطة D على المستوي (ABC) هو نقطة [illegible]

نعوض المستقيم (D) في معادلة المستوي (ABC)

فنجد :

$2(2-2t)-(-1+t)+4-t-3=0$

5 $4-4t+1-t+4-t-3=0$

$-6t=-6$

$\boxed{t=1}$

نعوض

5 $\begin{cases} x=2-2=0 \\ y=-1+1=0 \\ z=4-1=3 \end{cases}$

5 ومنه $\boxed{E(0,0,3)}$

مركز ثقل المثلث ABC :

5 $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}, \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

5 $\left(\frac{1+0-1}{3}, \frac{2+1-3}{3}, \frac{3+4+2}{3}\right)$

$(0, 0, 3)$

5 ومنه E هي مركز ثقل المثلث ABC.

100

المسألة الثانية :

$f(x)=\frac{2}{e^x+1}$

8 ① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

8 ومنه $\boxed{y=2}$ مستقيم مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$.

8 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

8 ومنه $\boxed{y=0}$ مستقيم مقارب أفقي منطبق على (xx') للخط C في جوار $+\infty$.

٢٥

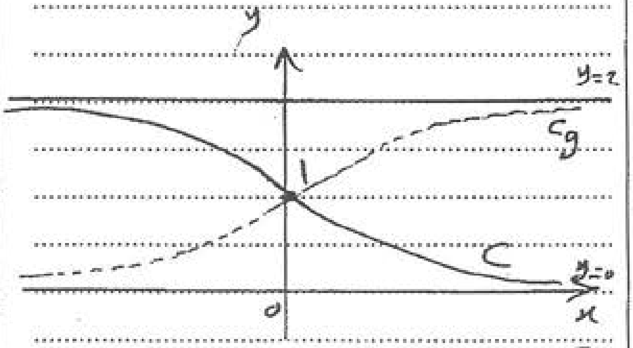
② f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,+\infty[$

8 $f'(x)=\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}<0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	—
$f(x)$	$2 \searrow 0$

(8 8)

8 + 4



8 ③ $g(x)=\frac{2}{1+e^{-x}}=f(-x)$

8 ومنه C_g هو نظير C بالنسبة إلى (yy')

④ $U_n=f(n)$

8 لما كان f متناقص على $[0,+\infty[$

8 كانت المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ متناقصة.

100

انتهت الأجوبة