أولاً: أجيبي عن الأسئلة الأربعة الآتية:

السؤال الأول:

$f(x) = (ax+b)e^x$

① نلاحظ أن $(1,0)$ تنتمي إلى C_f ومنه

4 $f(1)=0$

4 $(a+b)e=0$

4 ومنه $\boxed{a+b=0}$ ...(1)

ونلاحظ أن $(0,1)$ تنتمي إلى C_f ومنه

4 $f(0)=1$

4 $\boxed{b=1}$ ...(2)

نعوض (2) في (1) فنجد أن

$a+1=0$

4 $\boxed{a=-1}$

② $f(x)=(-x+1)e^x$

4 $f'(x) = -1e^x + e^x(-x+1)$

$f'(x) = e^x(-x)$

$f'(x) = -xe^x$

4 $m_A = f'(1) = -e$

4 $m_B = f'(-1) = \frac{1}{e}$

4 إذاً $\boxed{m_A \cdot m_B = -1}$

فالمماسان للخط C_f في النقطتين A و B متعامدان.

40

السؤال الثاني:

$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$

$a = x , b = \frac{-1}{x^2} , n = 10$

4 $T_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

4 $T_r = \binom{10}{r} (x)^{10-r} \left(\frac{-1}{x^2}\right)^r$

4 $T_r = \binom{10}{r} x^{10-r} (-1)^r x^{-2r}$

4 $T_r = \binom{10}{r} (-1)^r x^{10-3r}$

الحد الذي يحوي x^7 يجب أن يحقق

4 $10-3r=7$

$3r=3$

4 $\boxed{r=1}$

فالحد الذي يحوي x^7 هو

$T_1 = \binom{10}{1} (-1)^1 x^7$

4 $\boxed{T_1 = -10x^7}$

الحد الثابت المستقل عن x يجب أن يحقق

4 $10-3r=0$

$r = \frac{10}{3}$

4 مرفوض لأن $0 \le r \le 10$ و $r \in \mathbb{N}$ في المنشور السابق.

4 وبالتالي لا يوجد حد مستقل عن x في المنشور السابق.

40

* إذا لم تكتب الطالبة القانون وعوضت به بصورة صحيحة تنال علامة القانون ضمناً

السؤال الثالث:

الخاصة المطلوب إثباتها هي:

E(n): « 4^n-1-3n مضاعف للعدد 9 »

ونريد إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n

(I) الخاصة E(0) صحيحة لأن 5

$4^0-1-3(0)=0$

و 0 مضاعف لأي عدد وهو مضاعف للعدد 9.

(II) لنفترض أن الخاصة E(n) صحيحة. 5

أي يوجد عدد طبيعي k يحقق 5

$4^n-1-3n=9k$

ولنثبت صحة الخاصة E(n+1)

E(n+1): « $4^{n+1}-1-3n-3$ مضاعف للعدد 9 » 5

$4^{n+1}-1-3n-3=(4^n).4-1-3n-3$ 5

$=(9k+3n+1)(4)-1-3n-3$

$=36k+12n+4-3n-4$ 5

$=36k+9n$ 5

$=9(4k+n)$ 5

وهو مضاعف للعدد 9

فالخاصة E(n+1) صحيحة أيضاً إذا كانت E(n) صحيحة

فالخاصة E(n) صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n.

40

السؤال الرابع:

(1) $\vec{v_L}(0,-1,-2)$ 3

$\vec{v_{L'}}(-5,-2,2)$ 3

3 نلاحظ أن الشعاعين $\vec{v_L}$ و $\vec{v_{L'}}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتها غير متناسبة ($\frac{0}{-5}\neq\frac{-1}{-2}$)

3 فالمستقيمان L و L' إما أن يكونا متقاطعين أو متخالفين (ليسا متوازيين) لمعرفة ذلك بالحل المشترك:

$$\begin{cases} 4-5s'=-1 \\ 3-2s'=1-t \\ -1+2s'=1-2t \end{cases}$$

3

$$\begin{cases} s'=1 & (1) \\ t-2s'=-2 & (2) \\ 2t+2s'=2 & (3) \end{cases}$$

لنأخذ المعادلتين (1),(2)

3 من (1) نجد أن $\boxed{s'=1}$ نعوض في (2) فنجد

3 $t-2=-2$ ومنه $\boxed{t=0}$

نتحقق بالتعويض في (3) فنجد

3 $2(0)+2(1)=2$

$2=2$ محققة

فالمستقيمان L و L' متقاطعان في النقطة الموافقة لـ $t=0$ أو $s'=1$ فنقطة التقاطع هي:

3 $I(-1,1,1)$

(2) شعاعا توجيه المستوي هي $\vec{v_L}$ و $\vec{v_{L'}}$

بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم على المستوي المطلوب كتابة معادلته فيكون:

$\vec{n}\perp\vec{v_L}$ ومنه

3 $\vec{n}.\vec{v_L}=0$

وبالتالي:

3 $\boxed{-b-2c=0}$ ...(I)

و $\vec{n} \perp \vec{v}_{L'}$ ومنه

$\vec{n} \cdot \vec{v}_{L'} = 0$

3 $\boxed{-5a - 2b + 2c = 0}$ --- (II)

2 بفرض $\boxed{c=1}$ ينتج

$-b - 2 = 0$

$\boxed{b = -2}$

نعوض

$-5a + 4 + 2 = 0$

$5a = 6$

$\boxed{a = \frac{6}{5}}$

2 $\vec{n}\left(\frac{6}{5}, -2, 1\right)$

أي $\vec{n'} = 5\vec{n}\,(6, -10, 5)$

شعاع ناظم على المستوي:

والمستوي يمر بالنقطة I

معادلته:

$6(x+1) - 10(y-1) + 5(z-1) = 0$

3 $\boxed{6x - 10y + 5z + 11 = 0}$

40

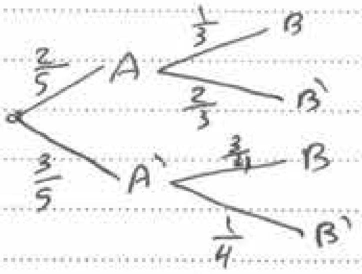
ثانياً: حل التمارين الأربعة الآتية:

التمرين الأول:

$P(A) = \frac{2}{5}$

$P(B|A) = \frac{1}{3}$

$P(B'|A') = \frac{1}{4}$

5 

5 $P(B) = P(A \cap B) + P(A' \cap B)$ ①

5 $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{4}$

5 $= \underset{(4)}{\frac{2}{15}} + \underset{(3)}{\frac{9}{20}}$

5 $= \frac{8 + 27}{60} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$

5 $\boxed{P(B) = \frac{7}{12}}$

5 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ②

5 $= \dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{7}{12}}$

5 $= \frac{2}{\cancel{15}_{5}} \times \frac{\cancel{12}^{4}}{7} = \frac{8}{35}$

③

5 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5 $= \frac{2}{5} + \frac{7}{12} - \frac{2}{15}$

(5) (3×4) (3×5)

(12)× (5)× ×4

$= \frac{24 + 35 - 8}{60} = \frac{51}{60}$

$= \frac{17}{20}$

5 $\boxed{P(A \cup B) = \frac{17}{20}}$

60

* إذا كتب الطالب العلاقة ① بصورة صحيحة دون أن يرسم المخطط ينال الدرجة المخصصة لرسم المخطط ضمناً.

التمرين الثاني:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n} \end{cases}$$

① الخاصة المطلوب إثباتها هي
$E(n): « \; 0 < u_n < 3 \; »$ 2
ونرغب إثبات هذه الخاصة أياً كان العدد الطبيعي n

(I) الخاصة $E(0)$ صحيحة لأن

$0 < u_0 = 1 < 3$ محققة 2

(II) لنفترض أن الخاصة $E(n)$ صحيحة ولنثبت صحة الخاصة
$E(n+1): « \; 0 < u_{n+1} < 3 \; »$ 2

لدينا فرضاً $0 < u_n < 3$ 2

$0 > -u_n > -3$ 2

$6 > 6-u_n > 3$ 2

$\frac{1}{6} < \frac{1}{6-u_n} < \frac{1}{3}$ 2

$\frac{9}{6} < \frac{9}{6-u_n} < 3$ 2

$0 < \frac{3}{2} < u_{n+1} < 3$ 2

فالخاصة $E(n+1)$ صحيحة اعتماداً على $E(n)$ 2

فالخاصة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي n

② $u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6-u_n} - u_n$ 2

$= \frac{9 - 6u_n + u_n^2}{6-u_n}$ 2

$u_{n+1} - u_n = \frac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$ 2

لكن $0 < u_n < 3$ لكل n 2

$\boxed{6 - u_n > 0}$ 2

و $(3-u_n)^2 > 0$ 2

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$ 2

فالمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متزايدة تماماً 2

③ $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-3} - \frac{1}{u_n - 3}$ 2

$= \frac{1}{\frac{9}{6-u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3}$ 2

$= \frac{6-u_n}{9 - 18 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3}$ 2

$= \frac{6-u_n}{3(u_n-3)} - \frac{1}{u_n-3}$ 2

$= \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{-(u_n-3)}{3(u_n-3)}$ 2

$= -\frac{1}{3} = r$

فالمتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ حسابية 2

أساسها $r = -\frac{1}{3}$ 2

$v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{1-3} = \frac{-1}{2}$ 2

* إذا برهن الطالب الخطوة $E(n+1)$ بحساب $f(u_n)$ بعد دراسة اطراد التابع f ينال الدرجات المخصصة كاملة.

$v_n = v_0 + r n$

2 $\boxed{v_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} n}$

ولدينا $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ 2

2 $\frac{1}{v_n} = u_n - 3$

$u_n = \frac{1}{v_n} + 3$

2 $\boxed{u_n = \frac{1}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3} n} + 3}$

ومنه : 2 $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 3}$

---

60 **التمرين الثالث :**

1 ← 3 (3 س) ، 1 ← 7 (7 ب)

10

سحب كرتين في آن واحد معاً (نستخدم التوافيق)

① نفرض B : حدث «الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين»

و A : حدث «مجموع رقمي الكرتين فردي»

الطلب : $P(A|B) = ?$

6 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$B = \{ س ، ب \}$

6 6 $P(B) = \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45}$

$A \cap B = \{ ف ب ، ز س \} ، \{ ف س ، ز ب \}$

4 ف ب ، 3 ز ب ، 2 ف س ، 1 ز س

10

6 $P(A \cap B) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} + \binom{1}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}$

6 $P(A \cap B) = \frac{6 + 4}{45} = \frac{10}{45}$

6 $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

6 $= \frac{\frac{10}{45}}{\frac{21}{45}} = \frac{10}{21}$

② الطلب : $P(A \cup B) = ?$

$A = \{ ف ، ز \}$

6 ف ، 4 ز

10

6 $P(A) = \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{24}{45}$

6 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{24}{45} + \frac{21}{45} - \frac{10}{45}$

6 $= \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$

60

التمرين الرابع:

$f(x) = e^{1-\cos x}$

12 $f'(x) = \sin x \, e^{1-\cos x}$

6 $f'(0) = 0$

6 $f(0) = e^{0} = 1$

لنبين أن: f اشتقاقية عند 0

نحسب بتعريف العدد المشتق للتابع f عند 0 يكون

6+6 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$

6 $\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{1-\cos x} - 1}{x} \right) = 0$

$f(0.01) \approx ?$

$f(a+h) \approx f'(a)\,h + f(a)$

6 $a = 0,\ h = 0.01$

3

3 $f(0+0.01) \approx f'(0)(0.01) + f(0)$

$\approx 0 + 1$

6 $\boxed{f(0.01) \approx 1}$

60

ثالثاً: حل كلاً من المسألتين الآتيتين:

المسألة الأولى:

12 1) a) R مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,-1)$ و $(F,2)$

4 $\vec{BR} = \frac{2}{2-1}\vec{BF}$

$\vec{BR} = 2\vec{BF}$

نفرض $R(x,y,z)$

4 $B(1,1,0)$ و $F(1,1,1)$

ومنه

4 $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

ومنه $\begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ y-1=0 \Rightarrow y=1 \\ z=2 \end{cases}$

4 ومنه $\boxed{R(1,1,2)}$

b) لدينا: $\vec{OP} = 2\vec{OA}$ لذا:

4 $P(2,0,0)$

ولدينا: $\vec{OQ} = 4\vec{OC}$ لذا:

4 $Q(0,4,0)$

4 $\vec{RP}(1,-1,-2)$

4 $\vec{RQ}(-1,3,-2)$

نلاحظ أن الشعاعين $\vec{RP}$ و $\vec{RQ}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما

4 غير متناسبة $\left(\frac{1}{-1} \neq \frac{-1}{3} \right)$

4 فالنقاط P و Q و R تعين

مستوياً وحيداً.

4 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ} = (1)(-1)+(-1)(3)+(-2)(-2)$

$= -1-3+4=0$

فالشعاعان $\overrightarrow{RQ}$ و $\overrightarrow{RP}$ متعامدان

4 فالمثلث PQR قائم في R.

② $P(2,0,0)$ تحقق معادلة المستوي

لأن $4(2)+0+0-8=0$

$0=0$ محققة.

و $Q(0,4,0)$ تحقق معادلة المستوي

لأن $4(0)+2(4)-8=0$

4 $0=0$ محققة.

و $R(1,1,2)$ تحقق معادلة المستوي

لأن $4(1)+2(1)+2-8=0$

4 $0=0$ محققة.

ومنه المعادلة $4x+2y+z-8=0$ هي معادلة المستوي (PQR)

أما النقطة $D(0,0,1)$:

لا تحقق معادلة المستوي (PQR)

لأن

4 $4(0)+2(0)+1-8=-7\neq 0$

ومنه النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (PQR)

4 ③ $\vec{u}_{(DH)} = \vec{n}_{(PQR)} = (4,2,1)$

4 $(DH):\begin{cases} x=4t \\ y=2t \\ z=t+1 \end{cases} : t\in\mathbb{R}$

نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم (DH) في معادلة المستوي (PQR)

$4(4t)+2(2t)+t+1-8=0$

$21t=7$

4 $\boxed{t=\frac{1}{3}}$

4 $\begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{2}{3} \\ z=\frac{4}{3} \end{cases}$

4 وبالتالي $H\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

4 $\overrightarrow{PR}(-1,1,2)$

4 $\overrightarrow{PH}\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

نلاحظ أن:

$\overrightarrow{PH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PR}$

4 فالشعاعان $\overrightarrow{PH}$ و $\overrightarrow{PR}$ مرتبطان خطياً فالنقاط P و H و R تقع على استقامة واحدة.

ومنه فالنقطة H تقع على المستقيم (PR)

100

* إذا أوجد الطالب معادلة المستوي PQR بالطريقة الاعتيادية ينال الدرجات المخصصة لهذا السؤال.

* إذا أثبت الطالب انتماء النقطة H إلى المستقيم PR بالتعويض ينال الدرجات المخصصة لهذا السؤال.

المسألة الثانية :

$f(x) = e^x - x - 1$

5 ① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

5 $f(x) = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)$: عند $+\infty$

$e^x \to +\infty$, $\frac{x}{e^x} \to 0$, $\frac{1}{e^x} \to 0$

5 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

② نبرهن $d : y = -x - 1$

5 $f(x) - y_d(x) = e^x$

5 $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - y_d) = 0$

ومنه المستقيم d الذي معادلته

5 $\boxed{y = -x - 1}$ مقارب

مائل للخط c في جوار $-\infty$.

③ f معرفة ومستمرة واشتقاقية في

على $]-\infty , +\infty[$

5 $f'(x) = e^x - 1$

عندما $f'(x) = 0$

5 $e^x - 1 = 0$

ومنه $e^x = 1$

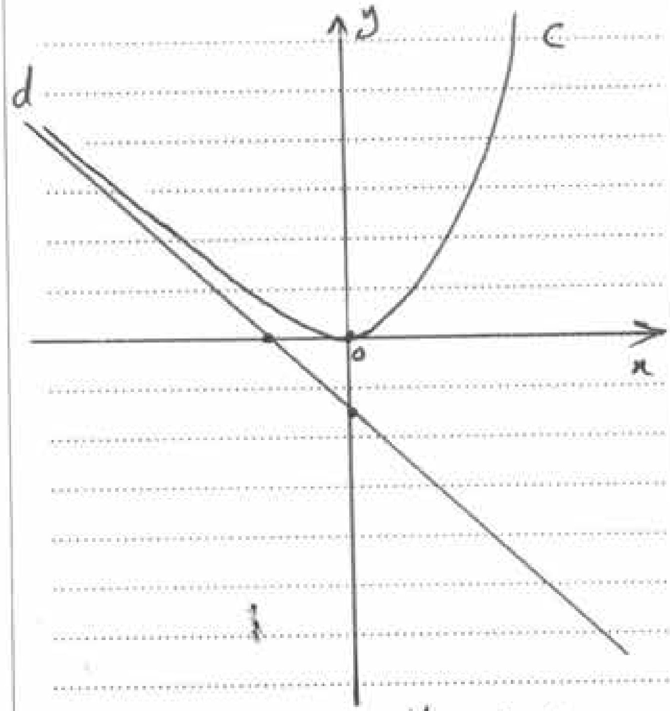
5 وبالتالي $\boxed{x = 0}$

5 $f(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5 + 5 $f(0) = 0$ قيمة صغرى محلياً .

15 + 5



$y = -x - 1$

x	0	-1
y	-1	0

④ $f(x) = e^x - x - 1$

f مستمر على $\mathbb{R}$

5 + 5 $F(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x$

انتهت الأجوبة